Universität Siegen
Fachbereich 12 - Elektrotechnik und Informatik
Fachgruppe Programmiersprachen (Prof. Dr. W. Merzenich)
Simon Budig, Achim Hennings
http://www.informatik.uni-siegen.de/ps/

Algorithmen II
Sommersemester 07

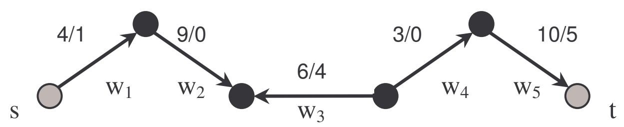
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe): a) Berechnen Sie in kartesischen und Polarkoordinaten:

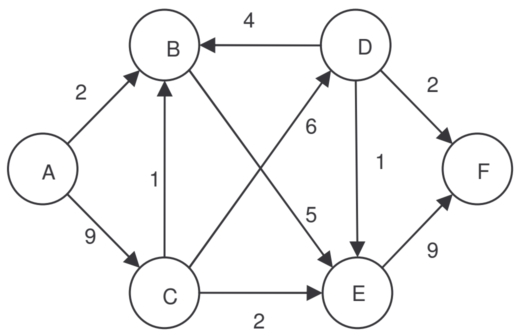
$$\frac{3+4i}{1+2i}, \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n \ (n \text{ ganz}), \text{ die Quadratwurzeln von } 1+2i.$$

b) Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 - z + 1 = 0$.
c) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbf{C} \mid |z+1| \leq |z-1|\}$.
d) Bestimmen Sie eine primitive dritte, vierte und fünfte Einheitswurzel, möglichst in Form von rationalen Zahlen und Wurzeln. (Hinweis für $n=5$: $t = 2\,\mathrm{Re}\,w = w + w^{-1}$ erfüllt die quadratische Gleichung $t^2 + t - 1 = 0$.)

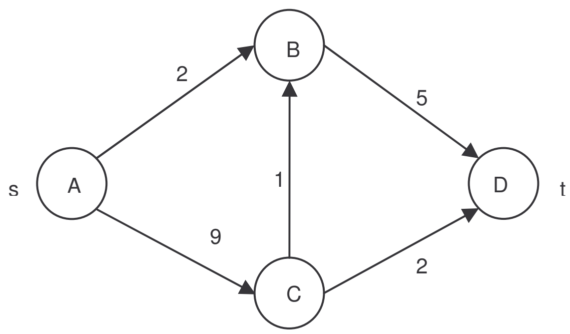
Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe): Bestimmen Sie für den folgenden Pfad die Mengen $\pi \rightarrow$ und $\pi \leftarrow$. Welchen Wert hat $\mu(f,\pi)$? Führen Sie anschließend die Relaxation durch, bis der Pfad gesättigt ist. Erläutern Sie auch die Begriffe Fluss, maximaler Fluss, transportierte Masse, Kapazität und Erhaltungsprinzip.



Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe): a) Wenden Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson auf das folgende Flussnetzwerk (a) an, um einen maximalen Fluss von Knoten A nach Knoten F zu finden.
b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Preflow-Push-Algorithmus einen maximalen Fluss von Knoten A nach Knoten D in folgendem Flussnetzwerk (b):



(a)



(b)

Aufgabe 4: Sei $N = (G, s, t, c)$ ein Fluss-Netzwerk. Unter einem Fluss (mit *wahlfreier Flussrichtung*) verstehen wir hier eine Abbildung $f : E \to \mathbf{R}$ mit

- $f_{in}(v) = f_{out}(v) \ \forall v \in V - \{s, t\}$
- $f(e) \le c(e) \ \forall e \in E$.

Es soll aber nicht $f(e) \ge 0$ verlangt werden, d.h. es ist unbegrenzter Rückfluss möglich. Man zeige: Genau dann sind die Maße $m(f)$ aller solchen Flüsse (durch eine gemeinsame Schranke) nach oben beschränkt, wenn es keinen Pfad $\pi : s \to t$ gibt, der nur aus Rückwärtskanten besteht.

Zusatz: Können auch andere Aussagen aus der Vorlesung auf diesen Fall übertragen werden?

Aufgabe 5: Führen Sie folgende zwei Probleme auf ein „normales" Flussnetzwerk-Problem zurück (mit anderen Worten: Wie kann man diese Probleme mit den uns bereits bekannten Algorithmen lösen?).

- Zusätzlich zu den Kapazitäten der Kanten haben auch noch die Knoten nur eine bestimmte Kapazität, die durch den Zu- bzw. Abfluss nicht überschritten werden darf. (D.h. für das Flussnetzwerk $N = (G, c, s, t)$ mit $G = (V, E)$ existiert eine zusätzliche Kapazitätsfunktion $d : V \to \mathbf{R}_{\ge 0}$ mit
$$\sum_{e^+ = v} f(e) \le d(v) \quad \text{für alle } v \in V - \{s, t\}$$
als zusätzliche Beschränkung für einen Fluss f.)
- Es können mehrere Quellen und Senken in dem Graphen existieren. Wie berechnet man hier den maximalen Fluss (dabei ist der maximale Fluss als die Summe der Einzelflüsse definiert)?

Aufgabe 6: Leiten Sie aus der komplexen diskreten Fouriertransformation die folgende reelle Version her: Jede reelle Funktion $f : \{0, ..., n-1\} \to \mathbf{R}$ besitzt eine Darstellung als Linearkombination mit *reellen* Koeffizienten aus den Funktionen

$$\cos(\frac{2\pi}{n} kx),\ k = 0, ..., m,\ \sin(\frac{2\pi}{n} kx),\ k = 1, ..., m-1, \text{ falls } n = 2m \text{ gerade ist,}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{n} kx),\ k = 0, ..., m,\ \sin(\frac{2\pi}{n} kx),\ k = 1, ..., m, \text{ falls } n = 2m+1 \text{ ungerade ist.}$$