

# Mathematische Grundlagen der Theoretischen Informatik Sommersemester 2007

## Übungsblatt 4

### Aufgabe 1

Zeigen Sie: Wenn  $(A, \leq_A)$  und  $(B, \leq_B)$  totale Ordnungen sind, dann ist auch die lexikographische Ordnung  $(A \times B, \leq_{A \times B}^{lex})$  wieder eine totale Ordnung.

### Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen gelten für jede Teilmenge  $S$  einer partiellen Ordnung? Welche gelten für jede Teilmenge  $S$  einer totalen Ordnung? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- a. Wenn  $S$  genau ein minimales Element  $a$  besitzt, dann ist  $a$  kleinstes Element von  $S$ .
- b. Wenn  $S$  ein Element  $a$  besitzt, das sowohl minimal als auch maximal ist, dann ist  $a$  das einzige Element von  $S$ .
- c. Wenn  $S$  genau eine obere Schranke  $a$  besitzt, dann ist  $a$  kleinste obere Schranke von  $S$ .
- d. Wenn  $S$  genau eine obere Schranke  $a$  besitzt, dann ist  $a$  maximales Element von  $S$ .
- e. Wenn  $S$  genau eine obere Schranke  $a$  besitzt, dann ist  $a$  größtes Element von  $S$ .

### Aufgabe 3

Sei  $A$  eine Menge und sei  $(B, \leq_B)$  eine partielle Ordnung. Dann definieren wir auf der Menge  $(A \rightarrow B)$  aller (totalen) Funktionen  $f : A \rightarrow B$  eine Relation  $\leq_{(A \rightarrow B)}$  durch

$$f \leq_{(A \rightarrow B)} g \Leftrightarrow f(a) \leq_B g(a) \text{ f\"ur alle } a \in A$$

- a. Zeigen Sie, dass  $((A \rightarrow B), \leq_{(A \rightarrow B)})$  wieder eine partielle Ordnung ist.
- b. Ist diese neue Ordnung total, wenn  $(B, \leq_B)$  total ist?
- c. Wie kann man sich diese neue Ordnung intuitiv vorstellen, wenn man f\"ur  $A$  und  $B$  die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen (mit  $\leq$  als Ordnung) w\"ahlt?

### Aufgabe 4

In einem Verband  $(M, \leq)$  ist das Supremum  $a \vee b$  und das Infimum  $a \wedge b$  zweier Elemente  $a, b \in M$  stets wohldefiniert, d.h.  $\vee$  und  $\wedge$  sind bin\"are Operationen auf der Menge  $M$ . Zeigen Sie, dass beide Operationen kommutativ und assoziativ sind. Besitzen beide auch stets ein neutrales Element?

Besprechung: Mi 30.05.2007 in H-A 6118/19