

Mathematische Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2007

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Seien A, B endliche Mengen.

- a. Wieviele Relationen gibt es zwischen A und B ?
- b. Gibt es unter allen Relationen zwischen A und B eine kleinste? Wie sieht sie aus? Ist sie eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2

Überlegen Sie sich für jede der folgenden Relationen auf \mathbb{Z} , ob sie reflexiv, symmetrisch, transitiv oder sogar eine Äquivalenzrelation ist.

- a. $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b = 0\}$
- b. $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 = b^2\}$
- c. $R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a - b| < 5\}$
- d. $R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
- e. $R_4 = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$

Aufgabe 3

Sei $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim \subseteq A^2$, definiert durch

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 * n_2 = m_2 * n_1$$

eine Äquivalenzrelation auf A ist. Wie sehen die Äquivalenzklassen von \sim aus? Wozu kann man diese Relation gebrauchen?

Aufgabe 4

- a. Sei A eine Menge und seien \sim und \approx zwei Äquivalenzrelationen auf A . Zeigen Sie:

$$\sim \subseteq \approx \Leftrightarrow [a]_{\sim} \subseteq [a]_{\approx} \text{ für jedes } a \in A$$

- b. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ sei $\sim_m \subseteq \mathbb{Z}^2$ (wie in der Vorlesung) definiert durch

$$a \sim_m b \Leftrightarrow m \text{ ist Teiler von } a - b$$

Für welche Paare $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ gilt $\sim_m \subseteq \sim_n$?

Aufgabe 5

Sei A eine Menge. Zeigen Sie:

- Der Durchschnitt zweier reflexiver Relationen auf A ist wieder reflexiv.
- Der Durchschnitt zweier symmetrischer Relationen auf A ist wieder symmetrisch.
- Der Durchschnitt zweier transitiver Relationen auf A ist wieder transitiv.
- Der Durchschnitt zweier Äquivalenzrelationen auf A ist wieder eine Äquivalenzrelation.

Gelten diese Zusammenhänge auch für den Durchschnitt endlich vieler oder sogar unendlich vieler Relationen? Gelten sie auch für die Vereinigung anstelle des Durchschnitts?

Besprechung: Mi 02.05.2007 in H-A 6118/19