Das Umgebungsmodell für den λ-Kalkül

Definition: Eine (Laufzeit-) *Umgebung* ist eine endliche partielle Funktion $\eta : Id \hookrightarrow Val$, wobei die Menge Val aller *Werte* v definiert ist durch:

$$\begin{array}{rcll} v & ::= & c & \text{(Konstante)} \\ & | & op\, c & \text{(partielle Applikation eines Operators)} \\ & | & (\lambda id.\, e, \eta) & \text{(closure)} \end{array}$$

Diese Definition ist natürlich zirkulär, aber das soll uns nicht stören. Bei der Implementierung lässt sich die Zirkularität vermeiden, indem man als zweite Komponente einer closure einen *pointer* auf eine Umgebung wählt.

Schreibweisen:

(a) $dom(\eta)$ bezeichnet den Definitionsbereich von η.

(b) $\eta[v/id]$ bezeichnet die Funktion $\eta' : Id \hookrightarrow Val$ mit

$$dom(\eta') = dom(\eta) \cup \{id\}$$
$$\eta'(id') = \begin{cases} v & \text{falls } id = id' \\ \eta(id) & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition: Ein *big step* in der Umgebungssemantik ist eine "Formel" der Form $(e, \eta) \Downarrow v$. Die *gültigen* big steps sind diejenigen, die sich mit den folgenden Regeln herleiten lassen:

(CLOSURE) $\quad (\lambda id.\, e, \eta) \Downarrow (\lambda id.\, e, \eta)$

(VAL) $\quad (v, \eta) \Downarrow v$ falls v *keine* closure ist

(ID) $\quad (id, \eta) \Downarrow \eta(id)$ falls $id \in dom(\eta)$

(COND-TRUE) $\quad \dfrac{(e_0, \eta) \Downarrow true \quad (e_1, \eta) \Downarrow v}{(\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2, \eta) \Downarrow v}$

(COND-FALSE) $\quad \dfrac{(e_0, \eta) \Downarrow false \quad (e_2, \eta) \Downarrow v}{(\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2, \eta) \Downarrow v}$

(LET) $\quad \dfrac{(e_1, \eta) \Downarrow v \quad (e_2, \eta[v/id]) \Downarrow v'}{\textbf{let } id = e_1 \textbf{ in } e_2 \Downarrow v'}$

(BETA-V) $\quad \dfrac{(e_1, \eta) \Downarrow (\lambda id.\, e, \eta') \quad (e_2, \eta) \Downarrow v \quad (e, \eta'[v/id]) \Downarrow v'}{(e_1\, e_2, \eta) \Downarrow v'}$

(OP-1) $\quad \dfrac{(e_1, \eta) \Downarrow op \quad (e_2, \eta) \Downarrow c}{(e_1\, e_2, \eta) \Downarrow op\, c}$

(OP-2) $\quad \dfrac{(e_1, \eta) \Downarrow op\, c_1 \quad (e_2, \eta) \Downarrow c_2}{(e_1\, e_2, \eta) \Downarrow op^I(c_1, c_2)}$

Dabei steht $op^I(c_1, c_2)$ für das übliche Resultat der Anwendung $op\, c_1\, c_2$, z.B. $+^I(3,4) = 7$ oder $<^I(3,4) = true$.