Übung 5, Aufgabe 2

(1) $\textbf{let rec}\ iter\ (n{:}\textbf{int})\ (f{:}\textbf{int} \to \textbf{int})\ (x{:}\textbf{int}) : \textbf{int} =$
$\quad \textbf{if}\ n = 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (n-1)\ f\ x)$
$\textbf{in}\ iter\ 2\ (\lambda x{:}\textbf{int}.\ x * x)$
$:: \textbf{int} \to \textbf{int}$

per Definition des syntaktischen Zuckers aus (2)

(2) $\textbf{let}\ iter = \textbf{rec}\ iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int}.$
$\quad \lambda n{:}\textbf{int}.\ \lambda f{:}\textbf{int} \to \textbf{int}.\ \lambda x{:}\textbf{int}.\ \textbf{if} = n\ 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x)$
$\textbf{in}\ iter\ 2\ (\lambda x{:}\textbf{int}.\ *\ x\ x)$
$:: \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (LET) aus (3) (27)

(3) $\textbf{rec}\ iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int}.$
$\lambda n{:}\textbf{int}.\ \lambda f{:}\textbf{int} \to \textbf{int}.\ \lambda x{:}\textbf{int}.\ \textbf{if} = n\ 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x)$
$:: \textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (REC) aus (4)

(4) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int}] \triangleright$
$\lambda n{:}\textbf{int}.\ \lambda f{:}\textbf{int} \to \textbf{int}.\ \lambda x{:}\textbf{int}.\ \textbf{if} = n\ 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x)$
$:: \textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (ABSTR) aus (5)

(5) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int}] \triangleright$
$\lambda f{:}\textbf{int} \to \textbf{int}.\ \lambda x{:}\textbf{int}.\ \textbf{if} = n\ 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x)$
$:: (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (ABSTR) aus (6)

(6) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int}] \triangleright$
$\lambda x{:}\textbf{int}.\ \textbf{if} = n\ 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x)$
$:: \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (ABSTR) aus (7)

(7) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright$
$\textbf{if} = n\ 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x)$
$:: \textbf{int}$

mit Regel (COND) aus (8) (13) (14)

(8) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright = n\ 0 :: \textbf{bool}$

mit Regel (APP) aus (9) (12)

(9) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright = n :: \textbf{int} \to \textbf{bool}$

mit Regel (APP) aus (10) (11)

(10) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright = :: \textbf{int} \to \textbf{int} \to \textbf{bool}$

mit Regel (CONST) und (ROP)

(11) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright n :: \textbf{int}$

mit Regel (ID)

(12) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright 0 :: \textbf{int}$

mit Regel (CONST) und (INT)

(13) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright x :: \textbf{int}$

mit Regel (ID)

(14) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright f\ (iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x) :: \textbf{int}$

mit Regel (APP) aus (15) (16)

(15) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright f :: \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (ID)

(16) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright iter\ (-\ n\ 1)\ f\ x :: \textbf{int}$

mit Regel (APP) aus (17) (26)

(17) $[iter{:}\textbf{int} \to (\textbf{int} \to \textbf{int}) \to \textbf{int} \to \textbf{int},\ n{:}\textbf{int},\ f{:}\textbf{int} \to \textbf{int},\ x{:}\textbf{int}] \triangleright iter\ (-\ n\ 1)\ f :: \textbf{int} \to \textbf{int}$

mit Regel (APP) aus (18) (25)

mit Regel (APP) aus (18) (25)

(18) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright$
$iter\ (-\ n\ 1)$
$:: (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (19) (20)

(19) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright$
$iter$
$:: \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (ID)

(20) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright -\ n\ 1 :: \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (21) (24)

(21) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright$
$-\ n$
$:: \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (22) (23)

(22) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright$
$-$
$:: \mathbf{int} \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (CONST) und (AOP)

(23) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright n :: \mathbf{int}$

mit Regel (ID)

(24) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright 1 :: \mathbf{int}$

mit Regel (CONST) und (INT)

(25) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright f :: \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (ID)

(26) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ n : \mathbf{int},\ f : \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright x :: \mathbf{int}$

mit Regel (ID)

(27) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}] \triangleright iter\ 2\ (\lambda x : \mathbf{int}.\ *\ x\ x) :: \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (28) (31)

(28) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}] \triangleright iter\ 2 :: (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (29) (30)

(29) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}] \triangleright iter :: \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (ID)

(30) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}] \triangleright 2 :: \mathbf{int}$

mit Regel (CONST) und (INT)

(31) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}] \triangleright \lambda x : \mathbf{int}.\ *\ x\ x :: \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (ABSTR) aus (32)

(32) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright *\ x\ x :: \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (33) (36)

(33) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright *\ x :: \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (APP) aus (34) (35)

(34) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright * :: \mathbf{int} \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

mit Regel (CONST) und (AOP)

(35) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright x :: \mathbf{int}$

mit Regel (ID)

(36) $[iter : \mathbf{int} \to (\mathbf{int} \to \mathbf{int}) \to \mathbf{int} \to \mathbf{int},\ x : \mathbf{int}] \triangleright x :: \mathbf{int}$

mit Regel (ID)