Grundlagen der theoretischen Informatik

Kurt Sieber

Fachbereich Mathematik/Theoretische Informatik
Universität Siegen

Vorlesung vom 29.11.2004 (Stand: 29.11.2004)

Definition 2.15 *Ein* Kellerautomat *(engl.* pushdown automaton *oder* PDA*) ist ein 6-Tupel* $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ *mit:*

- Σ *ist ein Alphabet (das* Eingabealphabet*)*
- Γ *ist ein Alphabet (das* Kelleralphabet*)*
- Q *ist eine endliche Menge (von* Zuständen*)*
- $s \in Q$ *(der* Startzustand*)*
- $F \subseteq Q$ *(Menge der* Endzustände *oder* akzeptierenden Zustände*)*
- Δ *ist eine* endliche *Teilmenge von* $(Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$

Δ *heißt* Übergangsrelation *von* M*, die Elemente von* Δ *heißen* Übergänge *oder* Transitionen *von* M*.*

Man beachte: Ein Kellerautomat kann ‘extrem nichtdeterministisch’ sein, weil die Übergangsrelation Δ ähnlich wie die eines ε-NDEA ‘spontane Zustandsübergänge’ erlaubt, bei denen sowohl das Eingabewort als auch der Kellerinhalt ignoriert werden.

Intuition für die Übergänge:

$((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta \subseteq (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$ bedeutet:

Wenn der Kellerautomat M

- sich im Zustand p befindet,
- das aktuelle Eingabewort mit u beginnt
- und der aktuelle Kellerinhalt mit β,

dann darf er in einem Übergangsschritt

- u entfernen,
- in den Zustand q wechseln
- und β durch γ ersetzen.

Dabei wird der Kellerinhalt von oben nach unten gelesen, d.h. β besteht aus den ersten Zeichen, die *oben* im Keller stehen.

Spezialfälle:

- $u = \varepsilon$:

  Das aktuelle Eingabewort wird ignoriert und bleibt unverändert.

- $\beta = \varepsilon$:

  Der aktuelle Kellerinhalt wird ignoriert und mit γ aufgefüllt.

- $\gamma = \varepsilon$:

  β wird durch ε ersetzt, d.h. vom Keller entfernt.

- $\beta = \gamma$:

  Der aktuelle Kellerinhalt bleibt unverändert.

- $\beta = \alpha\gamma$:

  $\alpha\gamma$ wird durch γ ersetzt, d.h. α wird vom Keller entfernt.

- $\gamma = \alpha\beta$:

  β wird durch $\alpha\beta$ ersetzt, d.h. der aktuelle Kellerinhalt wird mit α aufgefüllt.

Definition 2.16 *Sei* $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ *ein Kellerautomat.*

1. *Eine* Konfiguration *von* M *ist ein Element* $(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

   Intuition: q *ist der aktuelle Zustand,* w *das aktuelle Eingabewort und* α *der aktuelle Kellerinhalt.*

2. *Die Relation* $\vdash_M$ *(oder kurz:* $\vdash$*) auf der Menge der Konfigurationen ist wie folgt definiert:*

   Wenn $((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$*, dann gilt für alle* $v \in \Sigma^*$ *und* $\alpha \in \Gamma^*$*:*

$$(p, uv, \beta\alpha) \ \vdash_M \ (q, v, \gamma\alpha)$$

   und das sind die einzigen Konfigurationen, die in Relation $\vdash_M$ *stehen.*

Ein Paar $(p, uv, \beta\alpha) \vdash_M (q, v, \gamma\alpha)$ *heißt* Übergangsschritt *von* M.
$\vdash_M^n$ *(*$n \geq 0$*,)* $\vdash_M^+$ *und* $\vdash_M^*$ *sind wie üblich definiert.*

Beispiel:

Sei $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ mit

- $\Sigma = \Gamma = \{a, b\}$
- $Q = \{s, f\}$
- $F = \{f\}$
- $\Delta = \{$

$((s, a, \varepsilon), (s, a)),$	(1)	a in den Keller
$((s, \varepsilon, \varepsilon), (f, \varepsilon)),$	(2)	spontaner Zustandswechsel
$((f, b, a), (f, \varepsilon))\ \}$	(3)	b gegen a aufheben

Dann gilt z.B.

$$\begin{array}{llll}
(s, aabb, \varepsilon) & \vdash_M & (s, abb, a) & \text{mit (1)} \\
& \vdash_M & (s, bb, aa) & \text{mit (1)} \\
& \vdash_M & (f, bb, aa) & \text{mit (2)} \\
& \vdash_M & (f, b, a) & \text{mit (3)} \\
& \vdash_M & (f, \varepsilon, \varepsilon) & \text{mit (3)}
\end{array}$$

Definition 2.17 *Sei* $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ *ein Kellerautomat.*

1. M akzeptiert *das Wort* $w \in \Sigma^*$*, wenn ein* $q \in F$ *existiert mit* $(s, w, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
2. $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M$ *akzeptiert* $w\}$ *heißt die von* M akzeptierte *oder* erkannte *Sprache.*

In Worten: M *startet im Startzustand* s *mit dem Wort* w *auf dem Eingabeband und mit* leerem *Keller.* w *wird akzeptiert, wenn* M *einen Endzustand* q *erreichen* kann*, so dass sowohl das Eingabeband als auch der Keller leer sind.*

Beispiel:
Der oben definierte Kellerautomat M akzeptiert das Wort $aabb$, weil $(s, aabb, \varepsilon) \vdash_M^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$ und $f \in F$. Er 'errät' dabei den Zeitpunkt, in dem er vom Zustand s in den Zustand f wechselt.

Behauptung: $L(M) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Beweis:

'$\supseteq$': Sei $n \geq 0$. Dann gilt (auch für $n = 0$):

$$\begin{array}{lll} (s, a^n b^n) & \vdash_M^n & (s, b^n, a^n) \quad \text{mit (1)} \\ & \vdash_M & (f, b^n, a^n) \quad \text{mit (2)} \\ & \vdash_M^n & (f, \varepsilon, \varepsilon) \quad \text{mit (3)} \end{array}$$

'$\subseteq$': Sei $w \in L(M)$, d.h. $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$, da f einziger Endzustand ist. In $\vdash_M^*$ muss genau ein Schritt mit Transition (2) vorkommen, davor können nur (1)-Schritte stehen, dahinter nur (3)-Schritte. Also existieren $n \geq 0$, $v \in \Sigma^*$ mit $w = a^n v$ und

$$(s, w, \varepsilon) \vdash_{(1)}^* (s, v, a^n) \vdash_{(2)} (f, v, a^n) \vdash_{(3)}^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$$

Das kann aber nur gelten, wenn $v = b^n$, also $w = a^n b^n$. $\square$

Anmerkungen zur Literatur:

Sowohl die Definition des Kellerautomaten als auch die Definition des Akzeptierens variieren stark in der Literatur.

- Unsere Kellerautomaten sind sehr flexibel:

  Sowohl vom Eingabeband als auch vom Keller darf in jedem Schritt ein ganzes Wort (auch ε) gelesen werden. Oft wird stattdessen

  $$\Delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^*)$$

  gefordert. Das setzt natürlich voraus, dass im Keller stets mindestens ein Zeichen steht, d.h. man benötigt ein spezielles Startzeichen, das zu Beginn schon im Keller steht.

- Unsere Definition des Akzeptierens ist sehr streng:

  Der Kellerautomat muss im Endzustand sein *und* der Keller muss leer sein. Oft wird nur eins von beiden gefordert.

Man kann sich davon überzeugen, dass solche unterschiedlichen Definitionen zur gleichen Sprachklasse führen.

Weiteres Beispiel:

Sei $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$.

Sei $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ mit

- $\Sigma = \Gamma = \{a, b\}$
- $Q = F = \{s\}$
- $\Delta = \{$ $((s,a,\varepsilon),(s,a)),$ (1) a in den Keller

  $((s,b,\varepsilon),(s,b)),$ (2) b in den Keller

  $((s,a,b),(s,\varepsilon)),$ (3) a gegen b aufheben

  $((s,b,a),(s,\varepsilon))$ $\}$ (4) b gegen a aufheben

Behauptung: $L = L(M)$.

Beweis:

'$\subseteq$': Man *kann* die Übergangsschritte stets so wählen, dass im Keller der Überschuss an as bzw. bs des bisher gelesenen Wortes steht, d.h. wenn $w \in \Sigma^*$ mit $\#_a(w) = m$ und $\#_b(w) = n$, dann gilt:

$(s, w, \varepsilon) \ \vdash_M^* \ (s, \varepsilon, a^{m-n})$ falls $m \geq n$

$(s, w, \varepsilon) \ \vdash_M^* \ (s, \varepsilon, b^{n-m})$ falls $m \leq n$

Das zeigt man durch Induktion über $|w|$:

$w = \varepsilon$:

$(s, w, \varepsilon) \vdash_M^0 (s, \varepsilon, a^{0-0}) = (s, \varepsilon, b^{0-0})$

$w = va$:

Wenn $m > n$, dann ist $m - 1 \geq n$, also nach Induktionsannahme $(s, v, \varepsilon) \vdash_M^* (s, \varepsilon, a^{m-1-n})$ und damit $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (s, a, a^{m-1-n}) \vdash_M (s, \varepsilon, a^{m-n})$. Wenn $m \leq n$, dann ist $m - 1 < n$, also nach Induktionsannahme $(s, v, \varepsilon) \vdash_M^* (s, \varepsilon, b^{n-(m-1)})$ und damit $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (s, a, b^{n-(m-1)}) \vdash_M (s, \varepsilon, b^{n-m})$. Damit ist auch im Falle $m = n$ alles bewiesen, weil dann $b^{n-m} = \varepsilon = a^{m-n}$.

$w = vb$:

Analog zu $w = va$ (wegen der Symmetrie).

Damit ist '$\subseteq$' bewiesen, denn für $w \in L$ gilt $m = n$, also $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (s, \varepsilon, a^0) = (s, \varepsilon, \varepsilon)$ und das bedeutet $w \in L(M)$.

'$\supseteq$': Sei $w \in L(M)$, d.h. $(s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (s, \varepsilon, \varepsilon)$.

Für jeden Übergangsschritt von M gilt: Entweder es wird nur ein Zeichen verschoben (vom Eingabeband in den Keller), oder es wird gleichzeitig ein a und ein b entfernt (eines vom Eingabeband, das andere vom Keller).

Da in der letzten Konfiguration $(s, \varepsilon, \varepsilon)$ gleich viele as und bs vorhanden sind (Eingabewort und Kellerwort zusammengerechnet), muss dies auch für jede vorhergehende Konfiguration gelten, also insbesondere für die Anfangskonfiguration (s, w, ε).

Das bedeutet aber $\#_a(w) = \#_b(w)$, d.h. $w \in L$. $\square$

Im Beweis wurde die Tatsache benutzt, dass eine Verlängerung des Eingabewortes vom Kellerautomaten ignoriert werden kann. Gleiches gilt für das Kellerwort.

Lemma 2.18 *Wenn*

$$(p, u, \alpha) \ \vdash_M^* \ (q, v, \beta)$$

dann gilt auch

$$(p, uw, \alpha\gamma) \ \vdash_M^* \ (q, vw, \beta\gamma)$$

für alle $v \in \Sigma^*$ und $\gamma \in \Gamma^*$.

Beweisidee:

Mit $(p, uv, \alpha\gamma)$ kann man die gleiche Folge von Übergangsschritten durchführen wie mit (p, u, α), indem man v und γ ignoriert.

(Die Tatsache, dass man mit $(p, uv, \alpha\gamma)$ vielleicht auch neue Übergangsschritte durchführen kann, indem man γ benutzt, interessiert hier nicht.) $\square$

Satz 2.19 *Zu jeder kontextfreien Grammatik G lässt sich ein Kellerautomat M mit $L(M) = L(G)$ konstruieren.*

Beweisidee:

Man konstruiert den Kellerautomaten so, dass er eine Ableitung für das Eingabewort w in der Grammatik G 'erraten' kann.

Diese Ableitung führt er im Keller durch, d.h. er schreibt zu Beginn das Startzeichen in den Keller und führt dann die Ableitungsschritte der Grammatik im Keller aus.

Problem:

In einem Ableitungsschritt der Grammatik wird ein Nichtterminalzeichen A an einer *beliebigen* Stelle des bisher abgeleiteten Wortes durch die rechte Seite γ einer Produktion $A \to \gamma$ ersetzt.

Das kann der Kellerautomat nicht leisten, da er immer nur auf die Zeichen zugreifen kann, die *oben* im Keller stehen.

Lösung(?):

Wir betrachten nur *Linksableitungen*, bei denen ja immer das linkeste Nichtterminalzeichen ersetzt wird.

Aber auch das muss nicht ganz oben im Keller stehen, es können noch Terminalzeichen im Wege sein.

Die müssen aber, wenn die bisherige Ableitung richtig erraten wurde, mit den ersten Zeichen des Eingabewortes w übereinstimmen.

Also kann man sie in diesem Fall entfernen (und der andere Fall interessiert nicht, weil dann die bisherige Ableitung schon falsch erraten wurde).

Damit ist klar, dass der Kellerautomat drei Arten von Transitionen besitzen sollte, nämlich:

1. eine Transition, um das Startzeichen in den Keller zu legen,
2. für jede Produktion der Grammatik eine Transition, die den entsprechenden Ableitungsschritt durchführt,
3. Transitionen, um Terminalzeichen auf dem Eingabeband und im Keller miteinander zu vergleichen und zu entfernen.

Formal:

Sei $G = (\Sigma, N, S, P)$. Wir definieren $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ mit

- $\Gamma = N \cup \Sigma$
- $Q = \{s, f\}$
- $F = \{f\}$
- $$\begin{array}{rcll} \Delta & = & \{((s,\varepsilon,\varepsilon),(f,S))\} & (1) \\ & \cup & \{((f,\varepsilon,A),(f,\gamma)) \mid (A \to \gamma) \in P\} & (2) \\ & \cup & \{((f,a,a),(f,\varepsilon)) \mid a \in \Sigma\} & (3) \end{array}$$