Grundlagen der theoretischen Informatik

Kurt Sieber

Fachbereich Mathematik/Theoretische Informatik
Universität Siegen

Vorlesung vom 26.10.2004 (Stand: 27.10.2004)

Wie bestimmt man die Menge der erreichbaren Zustände?

- Sei $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ ein DEA. Für jedes $n \geq 0$ sei

  $R_n = \{q \in Q \mid$ es ex. ein $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq n$ und $(s, w) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\}$

- Die Mengen R_n lassen sich durch Induktion über n definieren:
  - $R_0 = \{s\}$
  - $R_{n+1} = R_n \cup \{\delta(q, a) \mid q \in R_n, a \in \Sigma\}$

- Es gilt $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots$ und die Menge R aller erreichbaren Zustände erhält man durch

  $R = \bigcup_{n \geq 0} R_n$

- Da alle R_n in der endlichen Menge Q enthalten sind, muss ein n existieren mit $R_n = R_{n+1}$.

- Daraus folgt $R_n = R_m$ für alle $m \geq n$, also $R = R_n$.

Algorithmus

- Berechne die Mengen $R_0, R_1, R_2, \ldots$ mit der induktiven Definition
- Sobald $R_n = R_{n+1}$ gilt, ist R_n die Menge der erreichbaren Zustände.

Man beachte:

- Nach den vorangegangen Überlegungen terminiert der Algorithmus und liefert das korrekte Ergebnis.
- Der gleiche Algorithmus funktioniert auch für NDEAs und auch für einen beliebigen Zustand p anstelle des Startzustands s.
- Er funktioniert sogar, wenn man noch nicht alle Übergänge kennt: denn im Induktionsschritt braucht man nur die Übergänge, die von den bereits gefundenen Zuständen ausgehen.
- Eigentlich handelt es sich um einen Graphalgorithmus (vgl. Vorlesung Algorithmen): Da die Markierung der Pfeile im Algorithmus keine Rolle spielt, kann der Automat als gerichteter Graph gesehen werden.

Gibt es noch weitere überflüssige Zustände?

- Ein Zustand heißt tot, wenn man von ihm aus keinen Endzustand mehr erreichen kann.
- Beipiele:

  der Zustand q' im Automaten A_{int},

  der Zustand $\emptyset$ in einem Potenzautomaten.
- Auch tote Zustände kann man aus einem Automaten entfernen, ohne dass sich die erkannte Sprache verändert.
- **Aber:** Dabei kann aus der totalen Funktion δ eine partielle Funktion werden, d.h. der entstehende Automat muss kein DEA mehr sein.

Anmerkung zur Literatur:

- Manche Autoren lassen partielle Funktionen in DEAs zu.

  Das entspricht besser dem intuitiven Begriff “deterministisch”

  und man spart sich tote Zustände.

- Aber partielle Funktionen bereiten technische Probleme bei der Schreibweise: Man kann sie nicht auf jedes Element anwenden.

  Deshalb lassen wir sie nicht in DEAs, sondern nur (als spezielle Relationen) in NDEAs zu.

  Das ist kein großer Nachteil, denn man kommt stets mit einem toten Zustand aus.

Sprachklassen

Bei vorgegebenem Alphabet Σ sei

- $\mathcal{L}_{reg} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ regulär.}\}$
- $\mathcal{L}_{DEA} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{es existiert ein DEA } A \text{ mit } L = L(A)\}$
- $\mathcal{L}_{NDEA} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{es existiert ein NDEA } A \text{ mit } L = L(A)\}$

Solche Mengen von Sprachen bezeichnet man als Sprachklassen,

Konvention: $\mathcal{L}$ für Sprachklassen.

Wir wollen zeigen:

$\mathcal{L}_{DEA} = \mathcal{L}_{NDEA} = \mathcal{L}_{reg}$

Die erste Gleichheit haben wir schon.

Satz 1.12 $\mathcal{L}_{DEA} = \mathcal{L}_{NDEA}$

Beweis:

'$\subseteq$':

Klar, da jeder DEA ein NDEA ist.

Genauer:

Wenn man einen DEA A als NDEA auffasst, d.h. wenn man die Übergangsfunktion δ als Relation auffasst, dann stimmen alle Definitionen ($\vdash_A, \vdash_A^*, \ldots$) für den DEA und den NDEA überein, also ist insbesondere die erkannte Sprache in beiden Fällen die gleiche.

'$\supseteq$':

Sei $L = L(A)$ für einen NDEA A. Dann gilt $L = L(A')$ für den Potenzautomaten A' von A, und A' ist ein DEA. $\Box$

Um zu zeigen, dass auch $\mathcal{L}_{reg}$ die gleiche Sprachklasse ist, betrachten wir zunächst eine weitere Verallgemeinerung unseres Automatenbegriffs. Wir lassen Pfeile zu, die mit dem leeren Wort ε markiert sind.

Definition 1.13 *Ein ε-NDEA ist ein 5-Tupel $A = (\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ mit:*

- Σ, Q, s, F *wie beim DEA*
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$

Intuition:

- Ein ε-NDEA kann spontane Zustandsübergänge durchführen, ohne ein Zeichen zu lesen.
- Durch diese weitere Freiheit kann es einfacher sein, einen endlichen Automaten für eine gegebene Sprache zu finden.

  z.B. indem man dem Automaten ermöglicht, ein ‘optionales’ Zeichen oder Teilwort mit ε zu überspringen (Sprachen L_{int}, L_{float}).

Arbeitsweise eines ε-NDEA:

- Nur $\vdash_A$ muss neu definiert werden

$$(q,w) \vdash_A (q',w') \;\Leftrightarrow\; \text{es existiert ein } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ mit } w = aw' \text{ und } (q,a,q') \in \Delta$$

- Alles andere wie beim NDEA.
- Die neue Sprachklasse bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA}$.

Übliche Frage:

Kann ein ε-NDEA prinzipiell mehr leisten als ein NDEA?

D.h. gibt es eine Sprache in $\mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA} \setminus \mathcal{L}_{NDEA}$?

Satz 1.14 *Zu jedem ε-NDEA lässt sich ein NDEA konstruieren, der die gleiche Sprache akzeptiert.*

Beweis:

Sei $A = (\Sigma, Q, s, F, \Delta)$ ein ε-NDEA.

Wie kann man die ε-Übergänge aus A entfernen, ohne die erkannte Sprache zu verändern?

Dazu definiert man zunächst den ε-Abschluss $E(p)$ eines Zustands $p \in Q$ durch:

$$E(p) = \{q \in Q \mid (p, \varepsilon) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\}$$

$E(p)$ enthält also genau die Zustände, die man von p aus mit einer Folge von ε-Schritten erreichen kann.

Insbesondere ist stets $p \in E(p)$, weil auch eine Folge von 0 Schritten zugelassen ist.

Sei nun $A' = (\Sigma, Q, s, F', \Delta')$ mit

- $\Delta' = \{(p,a,q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid \text{es ex. ein } p' \in E(p) \text{ mit } (p',a,q) \in \Delta\}$

  d.h. in A' nimmt man genau dann einen a-Übergang von p nach q auf, wenn es in A eine Folge von ε-Übergängen von p zu einem Zustand p', und von p' einen a-Übergang nach q gibt.

- $F' = \{p \in Q \mid E(p) \cap F \neq \emptyset\}$

  d.h. die Endzustände von A' sind genau die Zustände von A, die mit einer Folge von ε-Schritten in einen Endzustand übergehen können.

- A' ist ein NDEA, denn per Definition ist $\Delta' \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, d.h. A' enthält keine ε-Übergänge mehr.

- Andererseits gilt $\Delta \cap (Q \times \Sigma \times Q) \subseteq \Delta'$, denn wegen $p \in E(p)$ kann man in der Definition von Δ' auch $p' = p$ wählen.

  Das bedeutet, dass alle Pfeile von A, die nicht mit ε markiert sind, in A' erhalten bleiben.

Behauptung: $L(A) = L(A')$

Beweis:

'$\subseteq$':

- Sei $w = a_1 \dots a_n \in L(A)$, d.h. $(s, w) \vdash_A^* (f, \varepsilon)$ für ein $f \in F$.
- Diese Folge lässt sich so aufteilen:

$$\begin{array}{llllll} (s, a_1 \dots a_n) & \vdash_A^* & (q_0, a_1 \dots a_n) & \vdash_A & (q_1, a_2 \dots a_n) \\ & \vdots & & & \\ & \vdash_A^* & (q_{n-1}, a_n) & \vdash_A & (q_n, \varepsilon) \\ & \vdash_A^* & (f, \varepsilon) & & \end{array}$$

wobei die $\vdash_A^*$ nur aus ε-Schritten bestehen.

- Also gilt per Definition von Δ':

  $(s, a_1 \dots a_n) \;\vdash_{A'}\; (q_1, a_2 \dots a_n) \;\vdash_{A'}\; \dots \;\vdash_{A'}\; (q_n, \varepsilon)$

  und per Definition von F' ist $q_n \in F'$, also $w \in L(A')$

'$\supseteq$':

- Sei $w \in L(A')$, d.h. $(s, w) \vdash_{A'}^{*} (f', \varepsilon)$ für ein $f' \in F'$
- Da jeder Übergangsschritt in A' einer Folge von Übergangsschritten in A entspricht, gilt dann auch $(s, w) \vdash_{A}^{*} (f', \varepsilon)$

  und per Definition von F' gilt $(f', \varepsilon) \vdash_{A}^{*} (f, \varepsilon)$ für ein $f \in F$.
- Also gilt $(s, w) \vdash_{A}^{*} (f, \varepsilon)$ und damit $w \in L(A)$.

Noch zu zeigen:

Der NDEA A' lässt sich tatsächlich aus A konstruieren.

Dazu muss man die Menge $E(p)$ für jeden Zustand $p \in Q$ berechnen. Das geht analog zur Menge R der erreichbaren Zustände.

Für jedes $n \geq 0$ sei

$$E_n(p) = \{q \in Q \mid (p, \varepsilon) \vdash_A^n (q, \varepsilon)\}$$

(die Menge aller Zustände, die von p aus mit höchstens n ε-Schritten erreichbar sind).

Auch diese Mengen lassen sich durch Induktion über n berechnen:

- $E_0(p) = \{p\}$
- $E_{n+1}(p) = E_n(p) \cup \{q \in Q \mid \text{es ex. ein } p' \in E_n(p) \text{ mit } (p', \varepsilon, q) \in \Delta\}$

und bilden eine aufsteigende Folge $E_0(p) \subseteq E_1(p) \subseteq \ldots$

Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt:

Es existiert ein n mit $E_n(p) = E_{n+1}(p)$, und für diese Zahl n ist dann $E(p) = E_n(p)$.

Schließlich erhält man mit Hilfe der Mengen $E(p)$ die Übergangsrelation Δ' und die Endzustandsmenge F', und damit ist die Konstruktion von A' beendet. $\square$

Als unmittelbare Folgerung von Satz 1.14 erhalten wir

Satz 1.15

$$\mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA} = \mathcal{L}_{NDEA}$$