

---

# Grundlagen der theoretischen Informatik

---

Kurt Sieber

Fachbereich Mathematik/Theoretische Informatik  
Universität Siegen

Vorlesung vom 25.01.2005 (Stand: 01.02.2005)

## Berechenbarkeit

---

Wir haben gesehen, dass alle primitiv rekursiven Funktionen *total* sind. Es fehlt also noch ein Operator, der uns erlaubt, *partielle* Funktionen zu definieren.

**Definition 3.37** Sei  $k \geq 1$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \hookrightarrow \mathbb{N}$  entsteht durch Anwendung des (unbeschränkten)  $\mu$ -Operators aus  $g : \mathbb{N}^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{N}$ , wenn für alle  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} f(n_1, \dots, n_k) &= \mu z. (g(n_1, \dots, n_k, z) = 0) \\ &= \min \{z \in \mathbb{N} \mid (n_1, \dots, n_k, i) \in \text{Def}(g) \text{ für alle } i < z \\ &\quad \text{und } g(n_1, \dots, n_k, z) = 0\} \end{aligned}$$

wobei das Minimum der leeren Menge *undefiniert* ist.

Die Funktion  $f$  bezeichnet man dann mit  $\mu(g)$ .

## Berechenbarkeit

---

$\mu(g)(n_1, \dots, n_k) = \mu z. (g(n_1, \dots, n_k, z) = 0)$  ist also die *kleinste* Zahl  $z$  mit  $g(n_1, \dots, n_k, z) = 0$ , wobei die Einschränkung zu beachten ist, dass  $g(n_1, \dots, n_k, i)$  für alle  $i < z$  definiert sein muss. Wenn eine solche Zahl  $z$  nicht existiert, so ist  $\mu(g)(n_1, \dots, n_k)$  *undefiniert*.

### Beispiele:

1. Für jedes  $k \geq 1$  ist  $\mu(\text{const}_1^{k+1}) : \mathbb{N}^k \hookrightarrow \mathbb{N}$  die *leere* Funktion, denn es gilt

$$\begin{aligned}\mu(\text{const}_1^{k+1})(n_1, \dots, n_k) &= \mu z. (\text{const}_1^{k+1}(n_1, \dots, n_k, z) = 0) \\ &= \mu z. (1 = 0)\end{aligned}$$

ist undefiniert.

Allgemeiner gilt: Wenn  $g : \mathbb{N}^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{N}$  eine Funktion ist, die nie den Wert 0 annimmt, so ist  $\mu(g) : \mathbb{N}^k \hookrightarrow \mathbb{N}$  die leere Funktion.

## Berechenbarkeit

---

2. Sei  $p\_div : \mathbb{N}^2 \hookrightarrow \mathbb{N}$ ,  $(n_1, n_2) \mapsto n_1 \dot{\div} n_2$  die partielle ganzzahlige Division, definiert durch

$$n_1 \dot{\div} n_2 = \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{falls } n_2 = 0 \\ \max \{z \in \mathbb{N} \mid z * n_2 \leq n_1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen  $\max \{z \in \mathbb{N} \mid z * n_2 \leq n_1\}$

$$= \min \{z \in \mathbb{N} \mid (z + 1) * n_2 > n_1\}$$

$$= \min \{z \in \mathbb{N} \mid (z + 1) * n_2 \geq n_1 + 1\}$$

$$= \min \{z \in \mathbb{N} \mid n_1 + 1 \dot{-} (z + 1) * n_2 = 0\}$$

gilt  $n_1 \dot{\div} n_2 = \mu z. n_1 + 1 \dot{-} (z + 1) * n_2 = 0$  (auch im Falle  $n_2 = 0$ ).

Also ist  $p\_div = \mu(g)$ , wobei

$$g : \mathbb{N}^3 \hookrightarrow \mathbb{N}, (n_1, n_2, z) \mapsto n_1 + 1 \dot{-} (z + 1) * n_2$$

## Berechenbarkeit

---

**Definition 3.38** Die Menge  $\mu\text{-REC}$  der  $\mu$ -rekursiven Funktionen ist die kleinste Menge von Funktionen  $f : \mathbb{N}^k \hookrightarrow \mathbb{N}$  (für alle  $k \in \mathbb{N}$ ), die

- alle Grundfunktionen enthält und
- abgeschlossen ist unter Substitution, primitiver Rekursion und  $\mu$ -Rekursion.

Mit anderen Worten:

Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \hookrightarrow \mathbb{N}$  ist genau dann  $\mu$ -rekursiv, wenn sie durch (wiederholte) Anwendung der Operatoren *Sub*, *Prim* und  $\mu$  aus den Grundfunktionen  $const_c^k$ ,  $proj_i^k$  und *succ* entsteht.

### Beispiele:

1. Die leere Funktion  $\mu(const^{k+1}) : \mathbb{N}^k \hookrightarrow \mathbb{N}$  ist  $\mu$ -rekursiv.
2. *p\_div* ist  $\mu$ -rekursiv, weil  $p\_div = \mu(g)$  für die primitiv rekursive Funktion  $g : \mathbb{N}^3 \hookrightarrow \mathbb{N}$ ,  $(n_1, n_2, z) \mapsto n_1 + 1 \dot{-} (z + 1) * n_2$ .

## Berechenbarkeit

---

Der unbeschränkte  $\mu$ -Operator führt zu partiellen Funktionen, weil die 'Suche' nach dem Element  $z \in \mathbb{N}$  mit  $g(n_1, \dots, n_k, z) = 0$  unbeschränkt ist. Mit einer 'beschränkten Suche' bleibt man im Bereich der totalen Funktionen.

**Definition 3.39** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{N}$  entsteht durch Anwendung des beschränkten  $\mu$ -Operators aus  $g : \mathbb{N}^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{N}$ , wenn für alle  $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} f(n_1, \dots, n_k, m) &= \mu_{z \leq m} (g(n_1, \dots, n_k, z) = 0) \\ &= \min \{ z \leq m + 1 \mid \\ &\quad (n_1, \dots, n_k, i) \in \text{Def}(g) \text{ für alle } i < z \\ &\quad \text{und } (g(n_1, \dots, n_k, z) = 0 \text{ oder } z = m + 1) \} \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  bezeichnet man dann mit  $\mu^{\leq}(g)$ .

---

## Berechenbarkeit

---

In Worten:

$\mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m) = \mu z \leq m. (g(\bar{n}, z) = 0)$  ist die *kleinste* Zahl  $z \leq m$  mit  $g(\bar{n}, z) = 0$ , wieder mit der Einschränkung, dass  $g(\bar{n}, i)$  für alle  $i < z$  definiert sein muss.

Existiert eine solche Zahl  $z$  nicht, so unterscheidet man zwei Fälle:

1. Wenn  $g(\bar{n}, i)$  für  $i = 0, \dots, m$  definiert ist (d.h. wenn die ‘Suche’ nach der Zahl  $z$  terminiert und die Antwort ‘nein’ liefert), so setzt man  $\mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m) = m + 1$ .
2. Andernfalls (wenn man bei der ‘Suche’ schon in eine Endlosschleife gerät) ist  $\mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m)$  undefiniert.

Die Festlegung auf das Resultat  $m + 1$  im 1. Fall ist etwas willkürlich, aber doch sinnvoll: Man kann es so verstehen, dass man bei der Suche nach der Zahl  $z \leq m$  über die obere Schranke  $m$  hinaus gelaufen ist. Jedenfalls erkennt man am Resultat  $m + 1$ , dass man eine Zahl  $z$  mit der gewünschten Eigenschaft nicht gefunden hat.

---

## Berechenbarkeit

---

Für totale Funktionen  $g$  lässt sich die Definition von  $\mu^{\leq}(g)$  vereinfachen zu:

$$\mu^{\leq}(g)(n_1, \dots, n_k, m) = \min(\{m + 1\} \cup \{z \leq m \mid g(n_1, \dots, n_k, z) = 0\})$$

Die Menge, deren Minimum man hier bildet, ist niemals leer, weil sie mindestens die Zahl  $m + 1$  enthält. Also ist das Minimum stets wohldefiniert, d.h.  $\mu^{\leq}(g)$  ist total, wenn  $g$  total ist.

Damit ist es klar, dass der beschränkte  $\mu$ -Operator schwächer als der unbeschränkte ist, denn der unbeschränkte erlaubt uns ja, die Menge der totalen Funktionen zu verlassen.

Es stellt sich nun die Frage, ob man mit dem beschränkten  $\mu$ -Operator überhaupt über die Menge  $\mathcal{PR}$  hinauskommt, oder ob er—wie die Operatoren *If* und *Iter*—nur die Definition primitiv rekursiver Funktionen erleichtert. Die Antwort liefert der folgende Satz.

## Berechenbarkeit

---

**Satz 3.40**  $\mathcal{PR}$  ist abgeschlossen unter dem beschränkten  $\mu$ -Operator.

### Beweis:

Sei  $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  primitiv rekursiv. Dann kann man  $\mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m)$  durch folgende Induktion über  $m$  definieren:

$$\mu^{\leq}(g)(\bar{n}, 0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g(\bar{n}, 0) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m+1) = \begin{cases} \mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m) & \text{falls } \mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m) \leq m \\ m+1 & \text{falls } \mu^{\leq}(g)(\bar{n}, m) > m \\ & \text{und } g(\bar{n}, m+1) = 0 \\ m+2 & \text{sonst} \end{cases}$$