Fachbereich 6 · Mathematik
Theoretische Informatik

PD Dr. K. Sieber
Dipl.-Math. H. Schulz

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

## Übungsblatt 13

*Bei keiner anderen Erfindung ist das Nützliche mit dem Angenehmen so innig verbunden wie beim Fahrrad.*

Adam Opel (1837-95)

**Aufgabe 1**
Untersuchen Sie die Menge

$$H_\emptyset = \{n \in \mathbb{N} \mid \pi_n \text{ hält für } \textit{keine} \text{ Eingabe}\}$$

auf

**a.** Entscheidbarkeit und

**b.** Semi-Entscheidbarkeit.

**Aufgabe 2**
Zeigen Sie, dass $H_\emptyset$ auf

$$\mathit{Equiv} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \pi_m \text{ und } \pi_n \text{ berechnen die gleiche Funktion}\}$$

reduzierbar ist.

**Aufgabe 3**
Sei $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Der *Graph von* $f$ ist die Menge

$$Gr_f = \{(n, f(n)) \mid n \in \mathit{Def}(f)\}.$$

Zeigen Sie, dass der Graph einer totalen, berechenbaren Funktion entscheidbar ist.

Gilt auch die Umkehrung? Ist also eine berechenbare Funktion, deren Graph entscheidbar ist, stets total?

**Aufgabe 4**
Gegeben sei das *while*-Programm

$$
\begin{array}{l}
P = \texttt{read}\, Y; \\
\qquad \left.\begin{array}{l} \texttt{while}\, Y\, \texttt{do} \\ \quad \left. Y := \texttt{succ}(Y); \right\} C \\ \texttt{od}; \end{array}\right\} W \\
\quad \texttt{write}\, Y;
\end{array}
$$

Welche Funktion berechnet dieses Programm? Überlegen Sie dazu zunächst, für welche Eingabewerte das Programm hält.

Beweisen Sie Ihre Behauptung.

**Aufgabe 5**
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind, sei dazu $k \in \mathbb{N}$.

**a.** $\lambda x.\, k \cdot x$

**b.** $\lambda(x, y).\, x^y$

**c.** $\lambda x.\, x^k$, $\lambda x.\, k^x$

**d.** $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

**e.** $\overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

**f.** $c_= : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

**g.** $\mathrm{div}, \mathrm{mod} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

Hierbei gelte $x \,\mathrm{div}\, 0 = 0$ und $x \bmod 0 = x$ f.a. $x \in \mathbb{N}$.

**h.** $\lambda x.\, \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

**i.** $\min, \max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

**Aufgabe 6**
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$sqrt : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \text{ eine Quadratzahl ist} \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mu$-rekursiv ist.