Fachbereich 6 · Mathematik
Theoretische Informatik

PD Dr. Kurt Sieber
Dipl.-Math. H. Schulz

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Übungsblatt 2

Es ist der Fluch aller abstrakten Theorien, dass sie sehr weit entwickelt werden müssen, bis sie nützliche Ergebnisse liefern.

Hermann Weyl

Aufgabe 1
Sei Σ ein endliches Alphabet und $\Sigma^* = \{w_1, \ldots, w_n \mid n \in \mathbb{N}, w_i \in \Sigma \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$ die Menge der endlichen Wörter über Σ. Die Konkatenation von Wörtern sei durch

$$\circ : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*, (x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) \mapsto x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m$$

definiert.

a. Zeigen Sie, dass $(\Sigma^*, \circ)$ eine Halbgruppe ist.

b. Gibt es ein neutrales Element e, so dass $(\Sigma^*, \circ, e)$ ein Monoid ist?

c. Ist die Konkatenation von Wörtern eine kommutative Verknüpfung?

d. Zeigen Sie, dass sie Abbildung

$$|\cdot| : (\Sigma^*, \circ) \to (\mathbb{N}, +), x_1 \ldots x_n \mapsto n$$

ein Homomorphismus ist.
($|v|$ heißt *Länge* des Wortes v.)

e. Ist $|\cdot|$ ein Isomorphismus?

f. Geben Sie eine induktive Definition für die Längenabbildung $|\cdot|$ an.

Aufgabe 2
Umschreiben Sie die folgenden Mengen verbal. Sei dazu $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über einen Alphabet Σ und $v \in \Sigma^*$ ein Wort über diesem Alphabet.

a. $M_a = \{xv \mid x \in L\}$

b. $M_b = \{x \mid xv \in L\}$

c. $M_c = \{xy \mid x, y \in L\}$

Bestimmen Sie diese Mengen für den Fall $L = \{(ab)^n \mid n \geq 1\} \subseteq \{a, b\}^*$ und $v = b$.

Aufgabe 3
Geben Sie die folgenden Mengen formal an. Sei dazu Σ ein endliches Alphabet und $v \in \Sigma^*$ ein Wort.

a. die Menge M_a der natürlichen Vielfachen einer gegebenen natürlichen Zahl n

b. die Menge M_b der natürlichen Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl n

c. die Menge M_c der Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, deren Bildbereiche nur gerade Zahlen enthalten

d. die Menge M_d aller Mengen, die die leere Menge nicht als Element enthalten

e. die Menge M_e aller Wörter über einem gegeben Alphabet Σ, die v als Teilwort enthalten

f. die Menge M_f aller Teilwörter von v

g. die Menge M_g aller Anfangsstücke (Präfixe) von v

Aufgabe 4
Sei Σ ein endliches Alphabet. Es sei $\cdot^R : \Sigma^* \to \Sigma^*$ wie folgt induktiv definiert.

$$\begin{array}{lcll} \varepsilon^R & = & \varepsilon & \\ (va)^R & = & av^R & \qquad \text{wobei } a \in \Sigma, v \in \Sigma^* \end{array}$$

Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in \Sigma^*$ gilt:

a. $(vw)^R = w^R v^R$

b. $(w^R)^R = w$

c. Wenn v Teilwort von w ist, so ist v^R Teilwort von w^R.

(Hinweis: Verwenden Sie Induktion über die Wortlänge)

TERMINE:

VORLESUNG:	MONTAG	10–12 C.T.	AR-D 5102 (BLAUER HÖRSAAL)
	DIENSTAG	16–18 C.T.	PB-C 101 (PB-AULA)
ÜBUNGEN:	MONTAG	12–14 C.T.	H-F 104/105
	MONTAG	14–16 C.T.	H-F 104/105
	MITTWOCH	16–18 C.T.	H-F 104/105
	DONNERSTAG	10–12 C.T.	H-C 6336/37

DIE VORLESUNG AM 12.10.04 FÄLLT AUS.