Fachbereich 6 · Mathematik
Theoretische Informatik

Kurt Sieber
Ralf Greb

Logik in der Informatik
Sommersemester 2004

Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Zeigen Sie: Wenn S abzählbar ist und $\Phi \subseteq L^S$ ein unendliches Modell besitzt, dann besitzt Φ ein abzählbar unendliches Modell.

Aufgabe 2
Seien $\varphi, \varphi_1, \ldots \in L_0^S$ und $\Phi, \Phi_i, \ldots \subseteq L_0^S$ und sei $\mathcal{K}^S$ die Klasse *aller* S-Strukturen. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Mod-Operators:

a. $\mathrm{Mod}^S(\varphi) = \mathcal{K}^S \;\Leftrightarrow\; \varphi$ allgemeingültig

b. $\mathrm{Mod}^S(\varphi) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \varphi$ unerfüllbar

c. $\mathrm{Mod}^S(\neg\varphi) = \mathcal{K}^S \setminus \mathrm{Mod}^S(\varphi)$

d. $\mathrm{Mod}^S(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Mod}^S(\varphi_i)$

e. $\mathrm{Mod}^S(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Mod}^S(\varphi_i)$

f. $\mathrm{Mod}^S(\Phi) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathrm{Mod}^S(\varphi)$

g. $\mathrm{Mod}^S(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) = \mathrm{Mod}^S(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$

h. $\mathrm{Mod}^S(\bigcup_{i \in I} \Phi_i) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Mod}^S(\Phi_i)$

i. $\mathrm{Mod}^S(\{\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \mid \varphi_i \in \Phi_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}) = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Mod}^S(\Phi_i)$

j. $\mathrm{Mod}^S(\Phi) = \emptyset \;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\mathrm{Mod}^S(\Phi_0) = \emptyset$

k. $\mathrm{Mod}^S(\bigcup_{i \in I} \Phi_i) = \emptyset \;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine endliche Menge $I_0 \subseteq I$ mit $\mathrm{Mod}^S(\bigcup_{i \in I_0} \Phi_i) = \emptyset$

l. $\bigcap_{i \in I} \mathrm{Mod}^S(\Phi_i) = \emptyset \;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine endliche Menge $I_0 \subseteq I$ mit $\bigcap_{i \in I_0} \mathrm{Mod}^S(\Phi_i) = \emptyset$

Aufgabe 3
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von elementaren und Δ-elementaren Klassen:

a. Jede elementare Klasse ist Δ-elementar.

b. $\emptyset$ und $\mathcal{K}^S$ sind elementar.

c. Komplement, endlicher Durchschnitt und endliche Vereinigung von elementaren Klassen sind wieder elementar.

d. Jede Δ-elementare Klasse ist Durchschnitt von elementaren Klassen.

e. Endliche Vereinigung und beliebiger Durchschnitt von Δ-elementaren Klassen sind wieder Δ-elementar.

f. Für jede Δ-elementare Klasse $\mathcal{K}$ gilt $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^S(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$.

g. Für Δ-elementare Klassen $\mathcal{K}_i (i \in I)$ gilt:
$\bigcap_{i\in I} \mathcal{K}_i = \emptyset \;\Leftrightarrow\;$ es gibt eine endliche Menge $I_0 \subseteq I$ mit $\bigcap_{i\in I_0} \mathcal{K}_i = \emptyset$

h. Für jede Klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^S$ gilt: $\mathcal{K}$ elementar $\;\Leftrightarrow\;$ $\mathcal{K}$ und $(\mathcal{K}^S \setminus \mathcal{K})$ Δ-elementar

i. Sei $\mathcal{K}$ elementar, $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Dann gilt: $\mathcal{K}'$ elementar $\;\Leftrightarrow\;$ $\mathcal{K}'$ und $(\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}')$ Δ-elementar

Aufgabe 4
Sei $S = \{<\}$, wobei $<$ ein 2-stelliges Relationszeichen ist. Eine (*irreflexive*) *partielle Ordnung* ist eine S-Struktur, die die folgenden Axiome erfüllt:

$$\begin{array}{rl} \text{(irrefl)} & \forall x.\, \neg\, x < x \\ \text{(asymm)} & \forall x, y.\, \neg\, (x < y \land y < x) \\ \text{(trans)} & \forall x, y, z.\, x < y \land y < z \rightarrow x < z \end{array}$$

Eine irreflexive partielle Ordnung heißt *wohlfundiert* oder *Noethersch*, wenn es in ihr *keine* unendlich absteigenden Folgen $a_0 > a_1 > \ldots$ gibt, z.B. ist $(\mathbb{N}, <)$ wohlfundiert, aber $(\mathbb{Z}, <)$ nicht.

Zeigen Sie, daß die Klasse aller wohlfundierten partiellen Ordnungen *nicht* Δ-elementar ist.

Termine:

Vorlesung:	Mo 10:30–12:00	H-C 3303
und	Di 14:15–15:45	H-C 5324
Übung	Di 16:00–17:30	H-A 7409