

## Logik in der Informatik Sommersemester 2004

### Übungsblatt 5

#### Aufgabe 1

Welche der folgenden Formeln sind (für beliebige  $\varphi$  und  $\psi$ ) allgemeingültig? Leiten Sie die allgemeingültigen im Sequenzenkalkül  $\mathcal{S}$  her. Benutzen Sie dabei auch die abgeleiteten Regeln von Übungsblatt 4.

- a.  $(\forall x. \varphi) \wedge (\forall x. \psi) \rightarrow (\forall x. \varphi \wedge \psi)$
- b.  $(\exists x. \varphi) \wedge (\exists x. \psi) \rightarrow (\exists x. \varphi \wedge \psi)$
- c.  $(\forall x. \varphi) \vee (\forall x. \psi) \rightarrow (\forall x. \varphi \vee \psi)$
- d.  $(\exists x. \varphi) \vee (\exists x. \psi) \rightarrow (\exists x. \varphi \vee \psi)$
- e.  $((\forall x. \varphi) \rightarrow (\forall x. \psi)) \rightarrow (\forall x. \varphi \rightarrow \psi)$
- f.  $((\exists x. \varphi) \rightarrow (\exists x. \psi)) \rightarrow (\exists x. \varphi \rightarrow \psi)$

#### Aufgabe 2

Sei  $\mathcal{S}'$  der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül  $\mathcal{S}$  entsteht, indem wir die Regel

$$(\exists \forall) \quad \frac{\Gamma \quad \exists x. \varphi}{\Gamma \quad \forall x. \varphi}$$

hinzunehmen?

- a. Lassen sich mit  $\mathcal{S}'$  mehr Formeln (aus  $\emptyset$ ) ableiten als mit  $\mathcal{S}$ ?
- b. Lässt sich mit  $\mathcal{S}'$  ein Widerspruch (aus  $\emptyset$ ) ableiten, d.h. gibt es eine Formel  $\psi \in L^{\mathcal{S}}$  so, dass sowohl  $\psi$  als auch  $\neg\psi$  ableitbar sind?
- c. Lassen sich mit  $\mathcal{S}'$  *alle* Formeln (aus  $\emptyset$ ) ableiten?
- d. Welche Formeln lassen sich mit  $\mathcal{S}'$  (aus  $\emptyset$ ) ableiten? Geben Sie eine semantische Charakterisierung dieser Formeln an.

### Aufgabe 3

Sei  $S = \{0, \sigma\}$  und sei  $\Phi \subseteq L^S$  die Formelmenge, die aus den folgenden Axiomen besteht.

$$(P\ 1) \quad \forall x. \neg\sigma(x) \equiv 0$$

$$(P\ 2) \quad \forall x, y. \sigma(x) \equiv \sigma(y) \rightarrow x \equiv y$$

$$(P\ 3') \quad \varphi[0/x] \wedge (\forall x. \varphi \rightarrow \varphi[\sigma(x)/x]) \rightarrow \forall x. \varphi \quad (\text{für jedes } \varphi \in L^S)$$

Machen Sie sich zunächst klar, was diese Axiome bedeuten, und geben Sie dann eine Ableitung der Formel

$$\forall x. \neg\sigma(x) \equiv x$$

aus  $\Phi$  an. Benutzen Sie dabei (zusätzlich zu den bisher bekannten Regeln) die folgende Variante des modus ponens

$$(\rightarrow A) \quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \varphi \rightarrow \psi \quad \psi}$$

TERMINE:

VORLESUNG:	MO 10:30–12:00	H-C 3303
UND	DI 14:15–15:45	H-C 5324
ÜBUNG	DI 16:00–17:30	H-A 7409