

Logik in der Informatik Sommersemester 2004

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Eine Formel heißt *existenziell*, wenn sie mit Hilfe von \exists, \wedge, \vee aus quantorenfreien Formeln aufgebaut ist.

- a. Zeigen Sie, dass für jede *abgeschlossene* existenzielle Formel die Gültigkeit beim Übergang von einer Unterstruktur zur Oberstruktur erhalten bleibt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst eine geeignete Behauptung für *beliebige* existenzielle Formeln.

- b. Zeigen Sie, daß man in a. nicht auf die Voraussetzung der Abgeschlossenheit verzichten kann.

Aufgabe 2

Sei S die Signatur mit $C = \{0\}$ und $F_1 = \{\sigma\}$ und $\mathcal{N}_\sigma = (\mathbb{N}, \sigma^{\mathcal{N}_\sigma}, 0^{\mathcal{N}_\sigma})$ die S -Struktur der natürlichen Zahlen mit $\sigma^{\mathcal{N}_\sigma}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass jede Struktur $\mathcal{A} = (A, \sigma^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$, die die Axiome

$$\begin{aligned} (P1) \quad & \forall x. \neg \sigma(x) \equiv 0, \\ (P2) \quad & \forall x. \forall y. \sigma(x) \equiv \sigma(y) \rightarrow x \equiv y, \\ (P3) \quad & \forall P. P(0) \wedge (\forall x. P(x) \rightarrow P(\sigma(x))) \rightarrow \forall y. P(y) \end{aligned}$$

erfüllt, zu \mathcal{N}_σ isomorph ist. Dabei ist (P3) eine Formel der Prädikatenlogik zweiter Stufe, weil sie eine (quantifizierte) Prädikatvariable P enthält. Solchen Formeln haben wir noch keine Semantik zugeordnet, aber es sollte intuitiv klar sein, was man unter der Gültigkeit von (P3) versteht.

Aufgabe 3

Leiten Sie die folgenden Regeln im Sequenzkalkül \mathcal{S} ab.

$$(\neg\neg S) \quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \neg\neg\varphi}$$

$$(\neg\neg A) \quad \frac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg\neg\varphi \quad \psi}$$

$$(\forall \exists) \quad \frac{\Gamma \quad \forall x. \varphi}{\Gamma \quad \exists x. \varphi}$$

Aufgabe 4

Die Formel $(\exists x. \forall y. x \leq y) \rightarrow \forall y. \exists x. x \leq y$ lässt sich in 6 Schritten mit Hilfe der Regeln $(\rightarrow S)$, $(\forall S)$, $(\forall A)$, $(\exists S)$, $(\exists A)$ und (Vor) herleiten. In welcher Reihenfolge muss man die Regeln (im Rückwärtsbeweis) anwenden? Kommen unterschiedliche Reihenfolgen in Frage? Wenn ja, wieviele?

TERMINE:

VORLESUNG:	MO 10:30–12:00	H-C 3303
UND	DI 14:15–15:45	H-C 5324
ÜBUNG	DI 16:00–17:30	H-A 7409