

# Logik in der Informatik (SS 2004)

## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1

Sei  $S$  eine Signatur. Wie sieht die Menge  $T^S$  der Terme und die Menge  $L^S$  der Formeln über  $S$  aus, wenn

- $S$  leer ist,
- $S$  nur aus Konstantenzeichen besteht,
- $S$  nur aus Funktionszeichen besteht,
- $S$  nur aus Relationszeichen besteht?

### Aufgabe 2

Zeigen Sie: Ist  $S$  eine abzählbare Signatur (also endlich oder abzählbar unendlich), so sind die Mengen  $T^S$  und  $L^S$  beide abzählbar unendlich.

### Aufgabe 3

Sei  $S_{Ar} = \{0, 1, +, *\}$  die Signatur der Arithmetik (ohne  $<$ ) und sei  $\mathcal{N}$  die übliche  $S_{Ar}$ -Struktur der natürlichen Zahlen. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen in  $\mathcal{N}$  definierbar sind.

- $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ ist Teiler von } b\}$
- $R_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \mid c \text{ ist gemeinsamer Teiler von } a \text{ und } b\}$
- $R_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \mid c \text{ ist größter gemeinsamer Teiler von } a \text{ und } b\}$
- $R_4 = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ist Primzahl}\}$

### Aufgabe 4

Sei  $S$  eine beliebige Signatur.

- Geben Sie für jedes  $n \geq 1$  eine abgeschlossene Formel  $\varphi_{\leq n}$  an, deren Modelle genau die Strukturen  $\mathcal{A} = (A, \alpha)$  mit  $|A| \leq n$  sind.
- Geben Sie für jedes  $n \geq 2$  eine abgeschlossene Formel  $\varphi_{=n}$  an, deren Modelle genau die Strukturen  $\mathcal{A} = (A, \alpha)$  mit  $|A| = n$  sind.

### Aufgabe 5

Sei  $A$  eine *endliche* Menge und  $S$  eine endliche Signatur. Zeigen Sie, dass es dann nur endlich viele  $S$ -Strukturen mit Trägermenge  $A$  gibt. Wie viele sind es im Fall  $|A| = 2$  ?

### Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln allgemeingültig sind:

a.  $(\varphi \rightarrow \chi \wedge \chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

b.  $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$

c.  $(\exists x. \varphi) \leftrightarrow \neg(\forall x. \neg\varphi)$

d.  $(\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi_1 \rightarrow \psi) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \psi))$

e.  $((\exists x. \varphi) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x. \varphi \rightarrow \psi)$ , falls  $x \notin \text{frei}(\psi)$

Warum kann man auf die Bedingung  $x \notin \text{frei}(\psi)$  nicht verzichten?

TERMINE:

VORLESUNG:	Mo 10:30–12:00	H-C 3303
UND	Di 14:15–15:45	H-C 5324
ÜBUNG	NACH VEREINBARUNG	