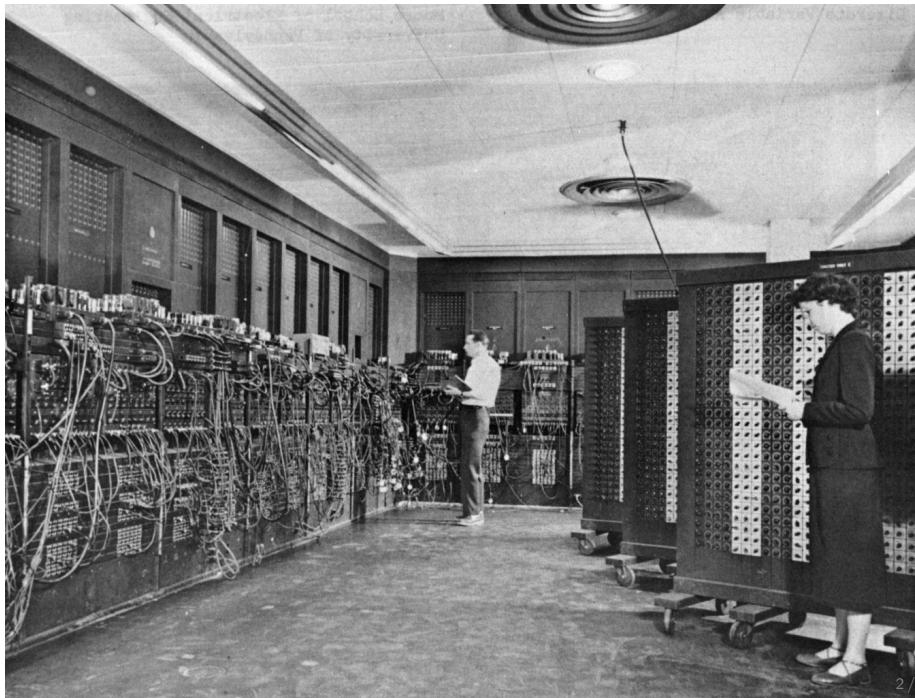


GTI

Hannes Diener

ENC B-0123,
diener@math.uni-siegen.de

13. Juni



Turingmaschinen als Wörter:

Mit etwas Arbeit können wir die mathematische Beschreibung einer Turingmaschine in ein formales Wort übersetzen. Nehmen wir hierfür an, daß

$$M = (\{q_1, \dots, q_k\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, \{q_2\}, \delta)$$

eine Turingmaschine mit beschränkten Eingabe- und Bandalphabet und nur einem Endzustand (beides keine wirklichen Einschränkungen). Dann können wir δ auf folgende Art und Weise als Wort beschreiben:

$\delta(q_i, x) = (q_j, y, A)$ beschreiben wir als das Wort $w \in \{0, 1, \#, N, L, R\}^*$ mit

$$w = \text{bin}(i)\#x\#\text{bin}(j)\#y\#A .$$

Also z.B. wenn $\delta(q_1, 1) = (q_4, 0, L)$, so übersetzen wir dies in das Wort

$$1\#1\#100\#0\#L .$$

Sind nun w_1, \dots, w_n solche Kodierungen sämtlicher Eingabe-Ausgabepaare von δ können wir diese zusätzlich mit $\$$ zu einem Wort

$$w \in \{0, 1, \#, N, L, R, \$\}^*$$

$$w = w_1\$ \dots \$w_n$$

zusammenfügen.

Sind nun w_1, \dots, w_n solche Kodierungen sämtlicher Eingabe-Ausgabepaare von δ können wir diese zusätzlich mit $\$$ zu einem Wort $w \in \{0, 1, \#, N, L, R, \$\}^*$

$$w = w_1\$ \dots \$w_n$$

zusammenfügen.

Dieses Wort beschreibt eine Turingmaschine wie oben (also prinzipiell alle Turingmaschinen) schon vollständig! In Zeichen wollen wir w_M für eine solche Beschreibung verwenden.



Da w_M einfach nur ein Wort ist können wir es aber einer anderen Turingmaschine als Eingabe geben!



Da w_M einfach nur ein Wort ist können wir es aber einer anderen Turingmaschine als Eingabe geben!

Die Frage ist noch ob Turingmaschinen „sinnvolle“ Dinge mit solchen Eingaben anstellen kann.

Wie Alan Turing schon in der Arbeit, in der er die Turingmaschine überhaupt erst eingeführt hat, zeigte gibt es eine *universelle Turingmaschine*.

Definition

Eine universelle Turingmaschine ist eine Turingmaschine T_U , welche, bei Eingabe einer Beschreibung einer Turingmaschine w_M und einem Eingabewort w

- ▶ *genau dann akzeptiert, wenn die Maschine M bei Eingabe w akzeptiert und*
- ▶ *in diesem Fall die gleiche Ausgabe wie M hat.*

Konstruktionsidee: Wir betrachten eine 3-Band Turingmaschine die wie folgt arbeitet.

1. Als erstes verschieben wir die Beschreibung w_M der Maschine M auf das zweite Band. Auf dem ersten Band steht also nur noch die Eingabe w . Das erste Band übernimmt die Rolle des Bandes der Maschine M . Auf dem dritten Band wollen wir den aktuellen Zustand der Maschine M vermerken; zum Start schreiben wir also eine 1 auf dieses Band.
2. In jedem simulierten Schritt der Maschine M lesen wir auf Band 1 ein Symbol und suchen dann, ob es in Band 2 einen passenden Übergang für dieses Symbol und den Zustand auf Band 3 gibt. Gibt es keinen verwerfen wir. Gibt es einen solchen führen wir die entsprechende Aktion aus, d.h. überschreiben das entsprechende Symbol auf Band 1 und bewegen den Lese-/Schreibkopf des ersten Bandes in die entsprechende Richtung. Danach schreiben wir auf Band 3 den neuen Zustand der simulierten Maschine.
3. Nach jedem dieser Schritten überprüfen wir noch, ob auf dem Band 3 der Endzustand d.h. $10 = \text{bin}(2)$ steht.