Grundlagen der theoretischen Informatik

Kurt Sieber

Fakultät IV, Department ETI
Universität Siegen

SS 2013

Vorlesung vom 18.04.2013

Sprachklassen

Bei vorgegebenem Alphabet Σ sei

$\mathcal{L}_{reg} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ regulär.}\}$

$\mathcal{L}_{DEA} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{es existiert ein DEA } A \text{ mit } L = L(A)\}$

$\mathcal{L}_{NDEA} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \text{es existiert ein NDEA } A \text{ mit } L = L(A)\}$

Solche Mengen von Sprachen bezeichnet man als *Sprachklassen*,

Konvention: $\mathcal{L}$ für Sprachklassen.

Wir wollen zeigen:

$\mathcal{L}_{DEA} = \mathcal{L}_{NDEA} = \mathcal{L}_{reg}$

Die erste Gleichheit haben wir schon.

Satz 2.16 $\mathcal{L}_{DEA} = \mathcal{L}_{NDEA}$

Beweis:

'$\subseteq$':

Klar, da jeder DEA ein NDEA ist.

Genauer: Jeden DEA $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ kann man mit dem NDEA $A' = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ mit $S = \{s\}$ und $\Delta = \{(p, a, q) \mid \delta(p, a) = q\}$ identifizieren. Dazu macht man sich klar, dass $\vdash_A$ (Definition 2.3) und $\vdash_{A'}$ (Definition 2.11) übereinstimmen, woraus dann insbesondere $L(A) = L(A')$ folgt.

'$\supseteq$':

Sei $L = L(A)$ für einen NDEA A. Dann gilt $L = L(A')$ für den Potenzautomaten A' von A, und A' ist ein DEA. $\square$

Endliche Automaten

Um zu zeigen, dass auch $\mathcal{L}_{reg}$ die gleiche Sprachklasse ist, betrachten wir zunächst eine weitere Verallgemeinerung unseres Automatenbegriffs. Wir lassen Pfeile zu, die mit dem leeren Wort ε markiert sind.

Definition 2.17 *Ein ε-NDEA ist ein 5-Tupel $A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ mit:*

- Σ, Q, S *und* F *sind wie beim NDEA definiert*
- *für die* Übergangsrelation Δ *gilt* $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$

Intuition:

- Ein ε-NDEA kann *spontane* Zustandsübergänge durchführen, ohne ein Zeichen zu lesen.
- Durch diese weitere Freiheit kann es einfacher sein, einen endlichen Automaten für eine gegebene Sprache zu finden, z.B. indem man dem Automaten ermöglicht, ein 'optionales' Zeichen oder Teilwort mit ε zu überspringen (Sprachen L_{int}, L_{float}).

Arbeitsweise eines ε-NDEA:

- Nur die *Übergangsschrittrelation* $\vdash_A$ muss neu definiert werden durch

$$(q,w) \vdash_A (q',w') \;\Leftrightarrow\; \text{es existiert ein } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ mit } w = aw' \text{ und } (q,a,q') \in \Delta$$

- Alles andere wie beim NDEA.
- Die neue Sprachklasse bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA}$.

Übliche Frage:

Kann ein ε-NDEA prinzipiell mehr leisten als ein NDEA?

D.h. gibt es eine Sprache in $\mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA} \setminus \mathcal{L}_{NDEA}$?

Satz 2.18 *Zu jedem ε-NDEA lässt sich ein NDEA konstruieren, der die gleiche Sprache akzeptiert.*

Beweis:

Sei $A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ ein ε-NDEA.

Wie kann man die ε-Übergänge aus A entfernen, ohne die erkannte Sprache zu verändern?

Dazu definiert man zunächst den *ε-Abschluss* $E(p)$ eines Zustands $p \in Q$ durch:

$$E(p) = \{q \in Q \mid (p, \varepsilon) \vdash_A^* (q, \varepsilon)\}$$

$E(p)$ enthält also genau die Zustände, die man von p aus mit einer Folge von ε-Schritten erreichen kann.

Insbesondere ist stets $p \in E(p)$, weil auch eine Folge von 0 Schritten zugelassen ist.

Sei nun $A' = (\Sigma, Q, S, F', \Delta')$ mit

- $\Delta' = \{(p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid$ es ex. ein $p' \in E(p)$ mit $(p', a, q) \in \Delta\}$

  d.h. in A' nimmt man genau dann einen a-Übergang von p nach q auf, wenn es in A eine Folge von ε-Übergängen von p zu einem Zustand p', und von p' einen a-Übergang nach q gibt.

- $F' = \{p \in Q \mid E(p) \cap F \neq \emptyset\}$

  d.h. die Endzustände von A' sind genau die Zustände von A, die mit einer Folge von ε-Schritten in einen Endzustand übergehen können.

- A' ist ein NDEA, denn per Definition ist $\Delta' \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, d.h. A' enthält *keine* ε-Übergänge mehr.

- Andererseits gilt $\Delta \cap (Q \times \Sigma \times Q) \subseteq \Delta'$, denn wegen $p \in E(p)$ kann man in der Definition von Δ' auch $p' = p$ wählen.

  Das bedeutet, dass alle Pfeile von A, die *nicht* mit ε markiert sind, in A' erhalten bleiben.

Behauptung: $L(A) = L(A')$

Beweis:

'$\subseteq$':

Sei $w = a_1 \ldots a_n \in L(A)$, d.h. es existieren Zustände $s \in S$, $f \in F$ mit $(s, w) \vdash_A^* (f, \varepsilon)$. Diese Folge von Übergangsschritten lässt sich so aufteilen

$$\begin{array}{llllll}
(s, a_1 \ldots a_n) & \vdash_A^* & (q_0, a_1 \ldots a_n) & \vdash_A & (q_1, a_2 \ldots a_n) \\
 & \vdots & & & \\
 & \vdash_A^* & (q_{n-1}, a_n) & \vdash_A & (q_n, \varepsilon) \\
 & \vdash_A^* & (f, \varepsilon) & &
\end{array}$$

wobei die $\vdash_A^*$ nur aus ε-Schritten bestehen, d.h. $q_0 \in E(s)$, $q_i \in E(q_{i-1})$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $f \in E(q_n)$.

Per Definition von Δ' gilt dann

$$(s, a_1 \ldots a_n) \ \vdash_{A'} \ (q_1, a_2 \ldots a_n) \ \vdash_{A'} \ \ldots \ \vdash_{A'} \ (q_n, \varepsilon)$$

und per Definition von F' ist $q_n \in F'$, also ist $w = a_1 \ldots a_n \in L(A')$.

'$\supseteq$':

Sei $w \in L(A')$, d.h. $(s, w) \vdash^*_{A'} (f', \varepsilon)$ für ein $f' \in F'$.

Da jeder Übergangsschritt in A' einer Folge von Übergangsschritten in A entspricht, gilt dann auch $(s, w) \vdash^*_A (f', \varepsilon)$ und per Definition von F' gilt $(f', \varepsilon) \vdash^*_A (f, \varepsilon)$ für ein $f \in F$.

Damit ist $(s, w) \vdash^*_A (f, \varepsilon)$ bewiesen, also $w \in L(A)$.

Noch zu zeigen:

Der NDEA A' lässt sich tatsächlich aus A *konstruieren*.

Dazu muss man die Menge $E(p)$ für jeden Zustand $p \in Q$ berechnen. Das geht analog zur Menge R der erreichbaren Zustände.

Für jedes $n \geq 0$ sei

$$E_n(p) = \{q \in Q \mid \exists\, m \leq n.\, (p, \varepsilon) \vdash_A^m (q, \varepsilon)\}$$

die Menge aller Zustände, die von p aus mit höchstens n ε-Schritten erreichbar sind. Auch diese Mengen lassen sich durch Induktion über n berechnen:

$E_0(p) = \{p\}$

$E_{n+1}(p) = E_n(p) \cup \{q \in Q \mid \text{es ex. ein } p' \in E_n(p) \text{ mit } (p', \varepsilon, q) \in \Delta\}$

und bilden eine aufsteigende Folge $E_0(p) \subseteq E_1(p) \subseteq \ldots$

Mit der gleichen Argumentation wie bei den Mengen R_n folgt: Es existiert ein n mit $E_n(p) = E_{n+1}(p)$, und für diese Zahl n ist dann $E(p) = E_n(p)$.

Mit Hilfe der Mengen $E(p)$ lassen sich dann leicht die Übergangsrelation Δ' und die Endzustandsmenge F' berechnen, womit die Konstruktion des NDEA A' abgeschlossen ist. $\square$

Als unmittelbare Folgerung von Satz 2.18 erhalten wir

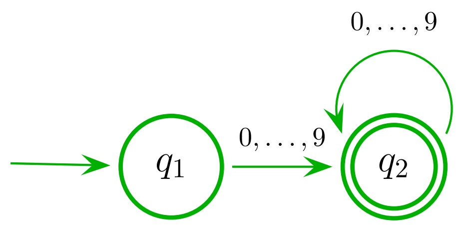
Satz 2.19

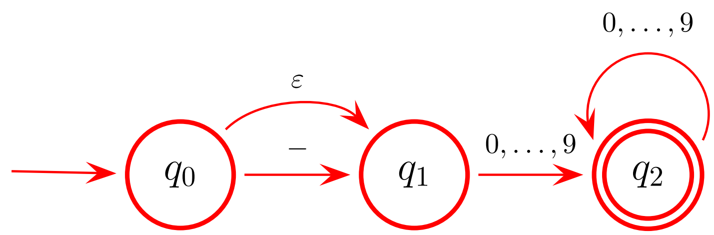
$$\mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA} \;=\; \mathcal{L}_{NDEA}$$

Endliche Automaten

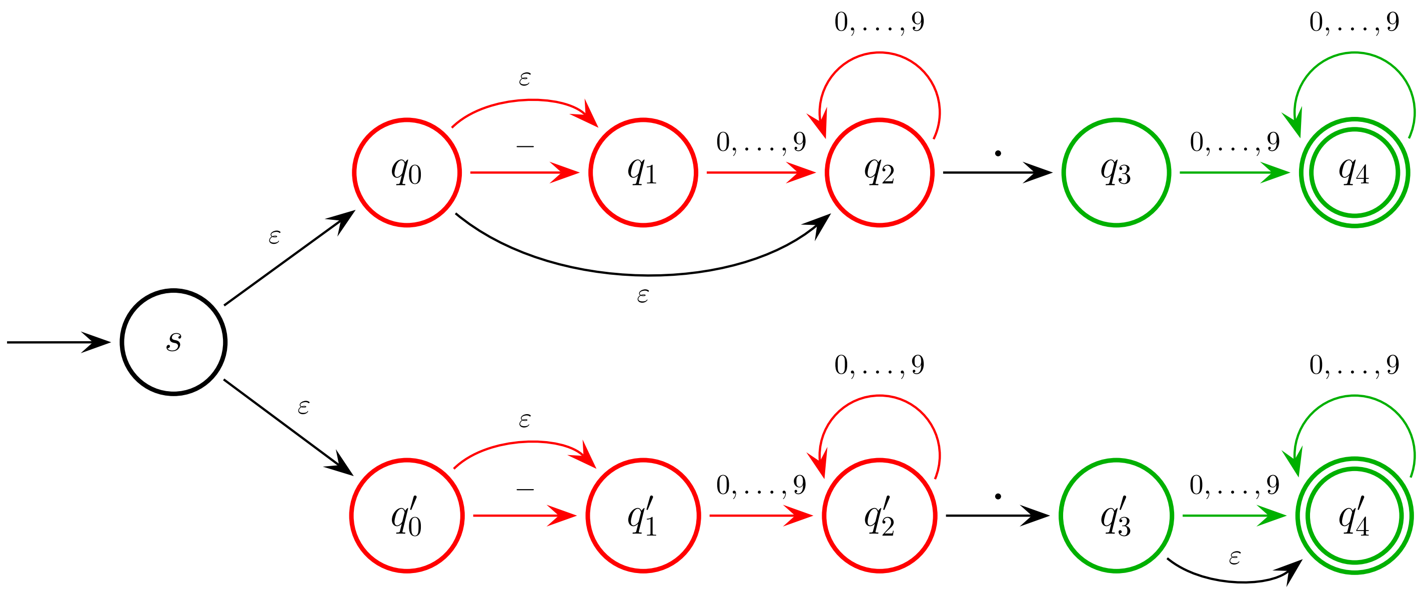
Beispiel:

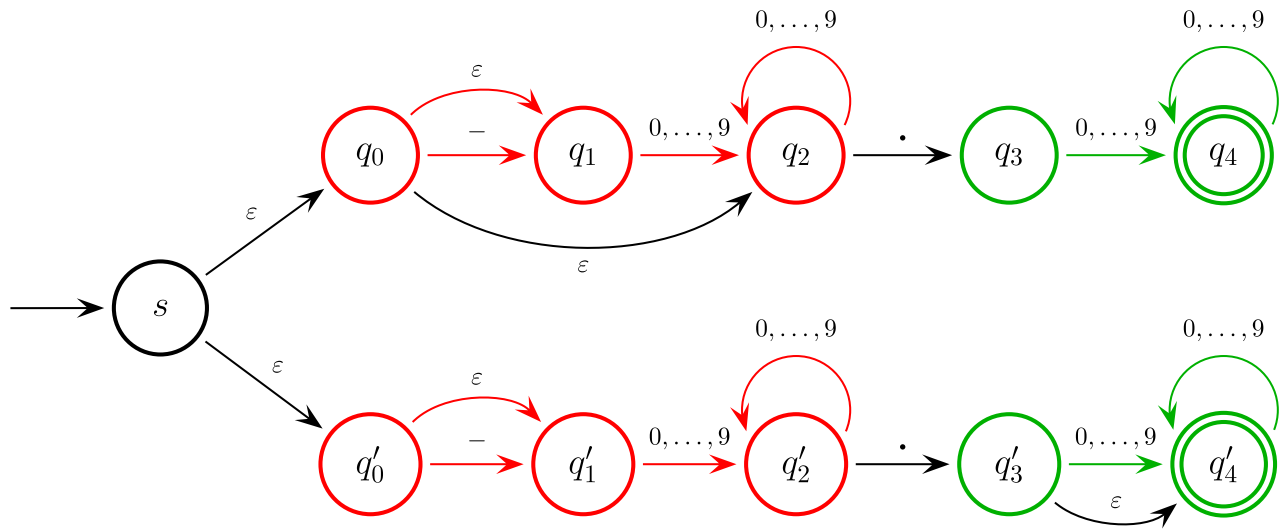
ε-NDEAs für $L_{nat} = \{0,\ldots,9\}^+$ und $L_{int} = \{-,\varepsilon\}L_{nat}$





und für $L_{fix} \;=\; (L_{int} \cup \{\varepsilon\})\{.\}L_{nat} \;\cup\; L_{int}\{.\}(L_{nat} \cup \{\varepsilon\})$



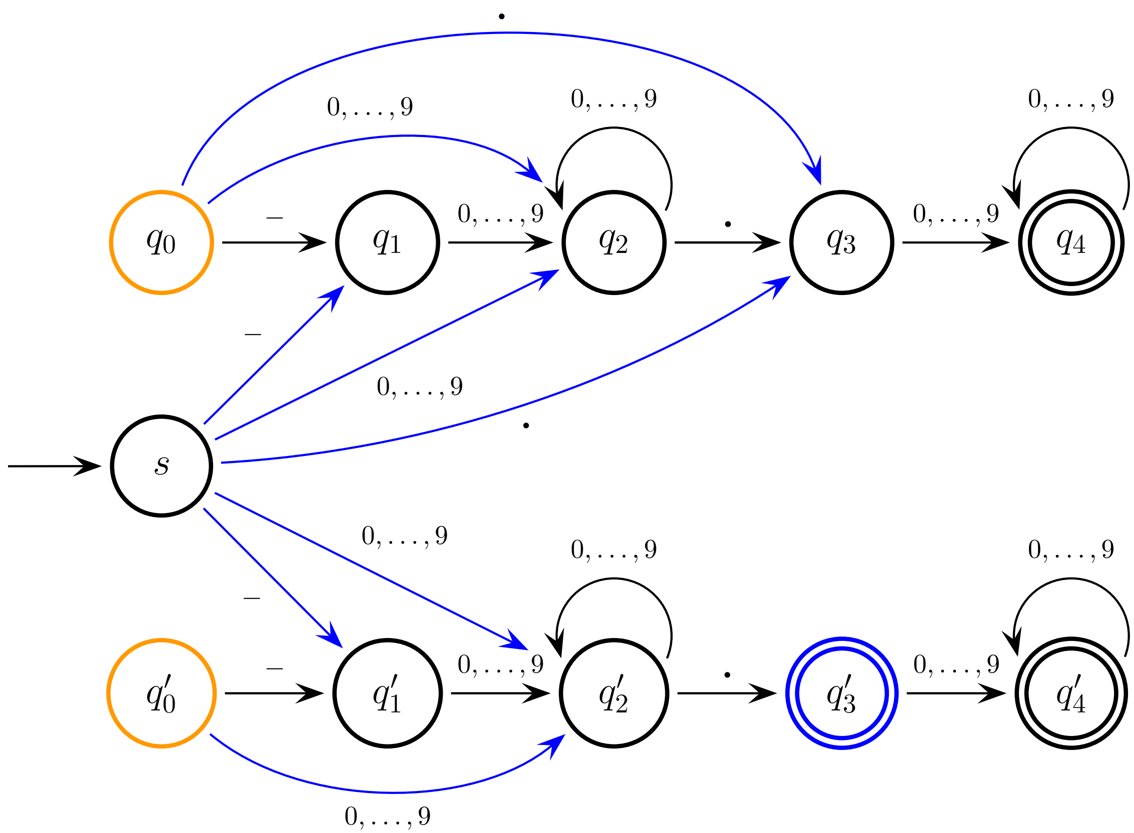


Umwandlung in einen NDEA: Die *neuen Übergänge* sind

$(s, -, q_1)$ da $q_0 \in E(s)$	(s, z, q_2) für jede Ziffer z, da $q_1 \in E(s)$
$(s, ., q_3)$ da $q_2 \in E(s)$	(q_0, z, q_2) für jede Ziffer z, da $q_1 \in E(q_0)$
$(q_0, ., q_3)$ da $q_2 \in E(q_0)$	(s, z, q'_2) für jede Ziffer z, da $q'_1 \in E(s)$
$(s, -, q'_1)$ da $q'_0 \in E(s)$	(q'_0, z, q'_2) für jede Ziffer z, da $q'_1 \in E(q'_0)$

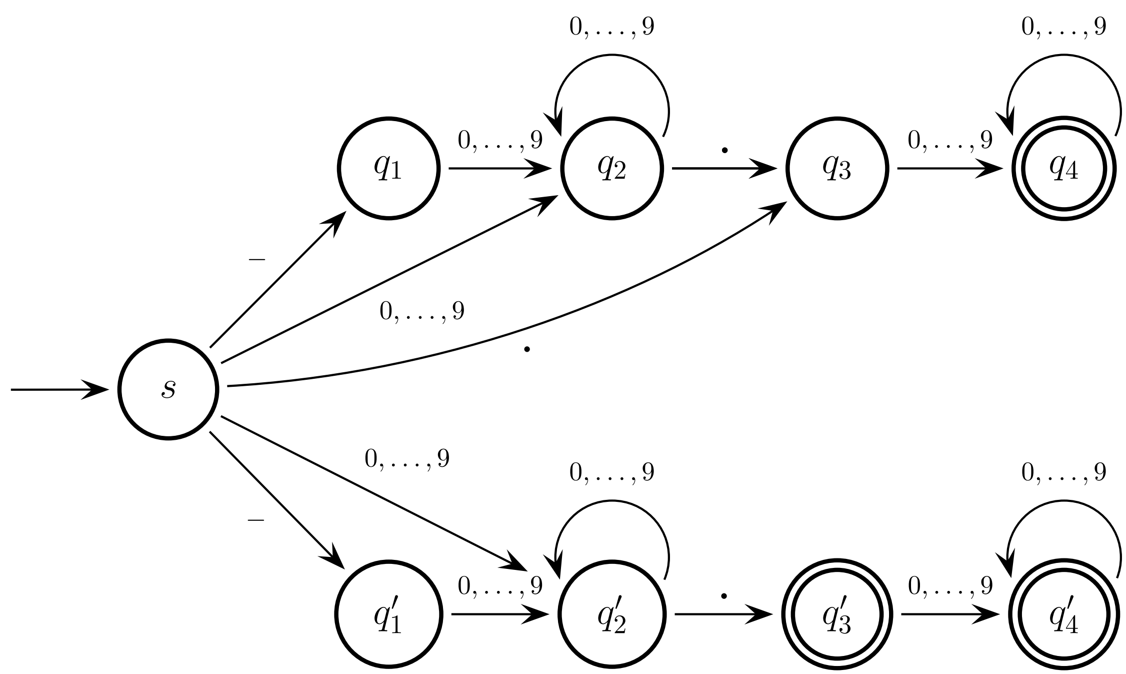
und q'_3 ist *neuer Endzustand*, weil $q'_4 \in E(q'_3)$.

Ergebnis: ein NDEA für L_{int}



Unerreichbare Zustände: q_0 und q'_0

Nach Entfernen der unerreichbaren Zustände:



Am Beispiel war schon zu sehen, wie man einen ε-NDEA konstruieren kann, der eine gegebene reguläre Sprache erkennt.

Dieses Verfahren wird jetzt präzisiert. So erhalten wir den Beweis, dass $\mathcal{L}_{reg} \subseteq \mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA}$.

Da wir schon wissen, dass

$$\mathcal{L}_{DEA} = \mathcal{L}_{NDEA} = \mathcal{L}_{\varepsilon\text{-}NDEA}$$

gilt, bezeichnen wir diese Sprachklasse jetzt mit

$$\mathcal{L}_{EA}$$

und benutzen den Begriff *endlicher Automat* (kurz: *EA*) als Sammelbegriff (d.h. als Synonym für ε-NDEA).

Satz 2.20 *Für die Sprachklasse* $\mathcal{L}_{EA}$ *(über dem Alphabet* Σ*) gilt:*

1. $\mathcal{L}_{EA}$ *enthält die Sprachen* $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ *und* $\{a\}$ *für alle* $a \in \Sigma$.
2. $\mathcal{L}_{EA}$ *ist* abgeschlossen *unter den Operationen* $\cup$, $\circ$, $^+$ *und* *, *d.h. wenn die Sprachen* L_1, L_2 *von endlichen Automaten erkannt werden, dann werden auch* $L_1 \cup L_2$, $L_1 \circ L_2$, L_1^+ *und* L_1^* *von endlichen Automaten erkannt.*
3. *Darüber hinaus gibt es für jede der Operationen in 2. einen* Algorithmus, *mit dem man den neuen Automaten konstruieren kann, also z.B. einen Algorithmus, der zu zwei endlichen Automaten* A_1 *und* A_2 *einen endlichen Automaten* A *mit* $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$ *konstruiert.*

Beweis:

1. NDEAs, die $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ und $\{a\}$ erkennen:

2. Abgeschlossenheit unter $\cup$:

   Seien $A_1 = (\Sigma, Q_1, S_1, F_1, \Delta_1)$ und $A_2 = (\Sigma, Q_2, S_2, F_2, \Delta_2)$ endliche Automaten. Wir dürfen annehmen, dass $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ (denn dies kann man durch Umbenennung der Zustände erreichen).

   Sei $A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ mit $Q = Q_1 \cup Q_2$, $S = S_1 \cup S_2$, $F = F_1 \cup F_2$ und $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Dann ist $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$, denn offensichtlich gilt für jedes Wort $w \in \Sigma^*$:

   Jeder akzeptierende Lauf von A_1 oder A_2 für w ist auch ein akzeptierender Lauf von A für w.

   Jeder akzeptierende Lauf von A für w ist entweder ein akzeptierender Lauf von A_1 oder von A_2 für w.

Endliche Automaten

Abgeschlossenheit unter $\circ$:

Seien $A_1 = (\Sigma, Q_1, S_1, F_1, \Delta_1)$ und $A_2 = (\Sigma, Q_2, S_2, F_2, \Delta_2)$ mit disjunkten Zustandsmengen Q_1, Q_2.

Einen Automaten A, der die Sprache $L(A_1) \circ L(A_2)$ erkennt, erhält man durch "Hintereinanderschalten" der Automaten A_1 und A_2, d.h.:

Man verbindet jeden Endzustand von A_1 mit jedem Startzustand von A_2 durch einen ε-Übergang. Als Startzustände von A wählt man die Startzustände von A_1 und als Endzustände von A wählt man die Endzustände von A_2.

Formal:

$A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ mit $Q = Q_1 \cup Q_2$, $S = S_1$, $F = F_2$ und $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f, \varepsilon, s) \mid f \in F_1, s \in S_2\}$

Zu zeigen: $L(A) = L(A_1) \circ L(A_2)$

$\subseteq$: Sei $w \in L(A)$. Dann existieren Zustände $s \in S = S_1$ und $f \in F = F_2$ mit $(s, w) \vdash_A^* (f, \varepsilon)$. Da man nur durch die neuen ε-Übergänge von A_1 nach A_2 gelangen kann, muss es eine Zerlegung $w = uv$ und Zustände $f_1 \in F_1,\ s_2 \in S_2$ geben mit

$$(s, w) \;=\; (s, uv) \;\vdash_A^*\; (f_1, v) \;\vdash_A\; (s_2, v) \;\vdash_A^*\; (f, \varepsilon)$$

Der erste Teil dieser Folge kann nur aus A_1-Schritten bestehen und der letzte Teil nur aus A_2-Schritten. Also folgt $(s, u) \vdash_{A_1}^* (f_1, \varepsilon)$ mit Lemma 2.9 und $(s_2, v) \vdash_{A_2}^* (f, \varepsilon)$, d.h. $u \in L(A_1)$ und $v \in L(A_2)$. Damit ist $w = uv \in L(A_1) \circ L(A_2)$.

$\supseteq$: Sei $w \in L(A_1) \circ L(A_2)$, d.h. $w = uv$ mit $u \in L(A_1)$ und $v \in L(A_2)$. Dann gibt es Zustände $s_1 \in S_1 = S,\ f_1 \in F_1,\ s_2 \in S_2$ und $f_2 \in F_2 = F$ mit $(s_1, u) \vdash_{A_1}^* (f_1, \varepsilon)$ und $(s_2, v) \vdash_{A_2}^* (f_2, \varepsilon)$. Wegen $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ folgt mit Lemma 2.9

$$(s_1, w) \;=\; (s_1, uv) \;\vdash_A^*\; (f_1, v) \;\vdash_A\; (s_2, v) \;\vdash_A^*\; (f_2, \varepsilon)$$

also $w \in L(A)$.

Endliche Automaten

Abgeschlossenheit unter $^+$ und *.

Es genügt, $^+$ zu betrachten, denn $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$ und wir wissen schon, dass $\{\varepsilon\} \in \mathcal{L}_{EA}$ und dass $\mathcal{L}_{EA}$ unter $\cup$ abgeschlossen ist.

Sei $A_1 = (\Sigma, Q_1, S_1, F_1, \Delta_1)$.

Einen Automaten A, der $L(A_1)^+$ erkennt, erhält man wie folgt:

Man verbindet jeden Endzustand von A_1 mit jedem Startzustand von A_1. Als Startzustände von A wählt man die Startzustände von A_1 und als Endzustände von A wählt man die Endzustände von A_1.

Formal:

$A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ mit $Q = Q_1$, $S = S_1$, $F = F_1$ und
$\Delta \;=\; \Delta_1 \;\cup\; \{(f, \varepsilon, s) \mid f \in F_1, s \in S_1\}$

Zu zeigen: $L(A) = L(A_1)^+$

$\subseteq$: Sei $w \in L(A)$, d.h. es existieren $s \in S_1, f \in F_1$ mit $(s,w) \vdash_A^* (f,\varepsilon)$ Wenn wir diese Folge von Übergangsschritten bei den neuen ε-Übergängen aufteilen, so erhalten wir eine Zerlegung $w = w_1 \dots w_n$ $(n \geq 1)$ mit:

$$\begin{array}{rcl} (s,w) & = & (s_1, w_1 \dots w_n) \vdash_A^* (f_1, w_2 \dots w_n) \\ & \vdash_A & (s_2, w_2 \dots w_n) \vdash_A^* (f_2, w_3 \dots w_n) \\ & \vdots & \\ & \vdash_A & (s_n, w_n) \qquad\qquad \vdash_A^* (f_n, \varepsilon) \end{array}$$

wobei $s_1, \dots, s_n \in S_1$, $f_1, \dots, f_n \in F_1$, $s = s_1$, $f_n = f$ und alle $\vdash_A^*$ nur aus A_1-Schritten bestehen. Mit Lemma 2.9 folgt dann $(s_i, w_i) \vdash_{A_1}^* (f_i, \varepsilon)$, also $w_i \in L(A_1)$ für $i = 1, \dots, n$, und damit $w = w_1 \dots w_n \in L(A_1)^+$.

$\supseteq$: Sei $w \in L(A_1)^+$, d.h. $w = w_1 \dots w_n$ $(n \geq 1)$ mit $w_i \in L(A_1)$ für $i = 1, \dots, n$. Dann existieren Zustände $s_1, \dots, s_n \in S_1$ und $f_1, \dots, f_n \in F_1$ mit $(s_i, w_i) \vdash^*_{A_1} (f_i, \varepsilon)$, also folgt mit Lemma 2.9

$$
\begin{array}{rcll}
(s_1, w) & = & (s_1, w_1 \dots w_n) & \vdash^*_A \ (f_1, w_2 \dots w_n) \\
& \vdash_A & (s_2, w_2 \dots w_n) & \vdash^*_A \ (f_2, w_3 \dots w_n) \\
& \vdots & & \\
& \vdash_A & (s_n, w_n) & \vdash^*_A \ (f_n, \varepsilon)
\end{array}
$$

und damit $w \in L(A)$. $\square$