1. Zeigen Sie, daß es keine totale universelle Funktion geben kann; d.h. es gibt keine totale μ-rekursive Funktion $v : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, so daß für jede totale μ-rekursive Funktion $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ einen Index e mit

$$v(e, \langle x_1, \dots, x_k \rangle) = h(x_1, \dots, x_k)$$

gibt.
(Warum funktioniert ihr Argument aber nicht, für die normale universelle Funktion?)

Lösung: Nehmen wir an es gibt ein solches v. Betrachten wir nun die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(n) = v(n, n) + 1 \ .$$

g ist offensichtlicherweise total und μ-rekursiv. Nach Annahme gibt es einen Index e, so daß $v(e, n) = g(n)$, also insbesondere $v(e, e) = g(e) = v(e, e)+1$; ein Widerspruch.
Diese Argument funktioniert nicht, bei u an Stelle von v, da der Wert $u(n, n)$ undefiniert sein kann; in diesem Fall $u(n, n) + 1$ auch undefiniert wäre und wir keinen Widerspruch erhalten. Der nächste Versuch könnte also sein g folgendermaßen zu definieren:

$$g(n) = \begin{cases} u(n, n) + 1 & \text{falls } u(n, n) \text{ definiert ist} \\ 42 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aber die auf diese Weise definierte Funktion ist nicht μ-rekursiv, da die Fallunterscheidung nicht entscheidbar ist.

2. Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbare Mengen. Zeigen Sie, daß dann auch $A \setminus B$ und $A \bigtriangleup B = \{x \mid x \text{ ist entweder in } A \text{ oder } B\text{, aber nicht in beiden}\}$ entscheidbar sind.

Lösung: Wie man leicht sieht ist

- Die Funktion $\chi_{A \setminus B} = \chi_A \dot{-} \chi_B$ (abgeschnittene Subtraktion!) ist μ-rekursiv da sie durch Substitution aus μ-rekursiven Funktionen hervorgeht.
- $\chi_{A \bigtriangleup B} = \chi_{A \setminus B} + \chi_{B \setminus A}$. Restliches Argument wie oben.

3. Zeigen Sie, daß für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

   (a) $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$;

   (b) ist A entscheidbar und $B \neq \emptyset, \mathbb{N}$, dann ist $A \leq B$;

Lösung:

   (a) $A \leq B$ via einer μ-rekursiven Funktion f genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$ mit der gleichen Funktion (!) f.

(b) Ist $B \neq \emptyset, \mathbb{N}$ dann gibt es i, j so daß $i \in B$ und $j \notin B$. Ausserdem ist nach Annahme χ_A berechenbar. Dann ist aber auch $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(n) = \begin{cases} j & \text{falls } \chi_A(n) = 0 \\ i & \text{sonst.} \end{cases}$$

μ-rekursiv. Ausserdem hat f die gewünschte Eigenschaft.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des s-m-n–Theorems, daß es eine Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$u(g(i,j), \cdot) = u(i, \cdot) + u(j, \cdot) \ .$$

Lösung: Sei $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert durch $h(x,y,z) = u(x,z) + u(y,z)$. Offensichtlicherweise ist h μ-rekursiv. Nun gibt es einen Index e für die universelle Funktion, so daß $u(e, \langle x,y,z\rangle^3) = h(x,y,z)$. Mit dem s-m-n–Theorem also

$$u(x,z) + u(y,z) = h(x,y,z) = u(e, \langle x,y,z\rangle^3) = u(s(e,2,x,y),z) \ .$$

Wie man sieht ist $\lambda x,y.s(e,2,x,y)$ die gewünschte Funktion g.

5. Zeigen Sie, daß auch $H \leqslant H_d$ und $H_0 \leqslant H_d$.

Lösung: Sei $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert durch $h(e,x,y) = u(e,x)$. Sei jetzt i ein Index für diese Funktion, also $u(i, \langle e,x,y\rangle) = h(e,x,y) = u(e,x)$. Dann ist mit dem s-m-n Theorem

$$u(e,x) = u(i, \langle e,x,y\rangle^3) = u(s(i,2,\langle e,x\rangle^2), y) \ .$$

Da diese Gleichung für alle y also insbesondere für $y = s(i,2,\langle e,x\rangle^2)$ gilt, haben wir

$$u(e,x) = u(s(i,2,\langle e,x\rangle^2), s(i,2,\langle e,x\rangle^2)) \ .$$

Also ist $H \leqslant H_d$ via $\lambda \langle e,x\rangle .s(i,2,\langle e,x\rangle^2)$. Oder um penibel zu sein $\lambda z.s(i,2,\langle \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle^2)$.

Da H_0 trivialerweise auf H reduzierbar ist via $\lambda e. \langle e,0\rangle^2$ und Reduzierbarkeit transitiv ist lässt sich auch H_0 auf H_d reduzieren.

6. Leiten Sie den Rekursionssatz aus dem Fixpunktsatz her.[1]

Lösung: Sei $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ μ-rekursiv. Wählen wir als erstes e, so daß $u(e, \langle x,y\rangle^2) = h(x,y)$. Mit dem s-m-n–Theorem gilt

$$u(s(e,1,x),y) = u(e, \langle x,y\rangle^2) = h(x,y) \ .$$

Da $\lambda x.s(e,1,x)$ total (wichtig!) und μ-rekursiv ist gibt es nach dem Fixpunktsatz einen Index r mit $u(s(e,1,r),y) = u(r,y)$. Insgesamt also

$$u(r,y) = u(s(e,1,r),y) = u(e, \langle r,y\rangle^2) = h(r,y) \ .$$

[1] Mit einem einfachen Beweis. Natürlich ist ein direkter Beweis des Rekursionssatzes auch eine Herleitung des Rekursionssatzes unter Annahme des Fixpunktsatzes. Gesucht ist hier aber wie gesagt eine kürzere Herleitung.

7. Zeigen Sie, daß es eine Zahl e gibt, so daß

$$u(e,x) = e \ ,$$

d.h. intuitiv das extrem narzisistische Programm e macht nichts anderes als seine eigene Beschreibung auszugeben.

Lösung: Sei $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $h(x,y) = x$. Nach dem Rekursionssatz existiert ein Index e, so daß $u(e,x) = h(e,x)$ für alle x. Also $u(e,x) = h(e,x) = e$.