1. Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

   - $\lambda x.\lambda y.x^y$
   - $\lambda x.\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$

   Lösung:

   - Wie wir aus der Vorlesung wissen ist die Multiplikation $f.$ primitiv-rekursiv. Da die Exponentiation f_{exp} die folgenden Rekursionsgleichungen erfüllt

     $$f_{exp}(0, x) = 1 = S(N(y))$$
     $$f_{exp}(y + 1, x) = x^{y+1} = x^y \cdot x = f.(f_{exp}(y, x), x)$$

     ist f_{exp} primitiv rekursiv (da $S \circ N$ und $f.$ es sind).

   - Aus der Vorlesung wissen wir, daß $\lambda x.2x$ primitiv rekursiv ist (Als Komposition der Multiplikation und $S(S(N))$). Ausserdem ist damit die Funktion $g(x, y) = \overline{\text{sg}}(x - 2y)$. Diese Funktion ist 1, solange y nicht größer als $\frac{x}{2}$ ist. Wie man leicht einsieht ist

     $$\lambda x.\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = \sum_{i=0}^{x} g(x, i) - 1 \ .$$

     Die Summe auf der rechten Seite erfüllt aber die Rekursionsgleichung

     $$\sum_{i=0}^{0} g(x, i) = g(x, 0)$$
     $$\sum_{i=0}^{y+1} g(x, i) = \sum_{i=0}^{y} g(x, i) + g(x, y + 1)$$

     ist also als Funktion $\lambda x, y. \sum_{i=0}^{y} g(x, i)$ primitiv rekursiv. Also ist auch $\lambda x.\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ primitiv rekursiv.

2. Zeigen Sie, daß die Paarungs-Funktion π aus der Vorlesung bijektiv ist. Folgern Sie ausserdem mit Hilfe von vollständiger Induktion, daß für alle k die Funktionen $\langle \cdot \rangle^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ bijektiv sind.

   Lösung:

   - Sei $\pi(n, 0) = T_n$ wie man leicht sieht ist $T_n < T_{n+1}$.
   - Des Weiteren gilt

     $$\pi(x, y) = \pi(x + y, 0) + y \ .$$

   Sei jetzt $z \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gibt eindeutige Zahlen n, m, so daß $z = T_n + m$ mit $0 \leqslant m < n$: Sei hierzu n die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, so daß $T_n \leqslant z < T_{n+1}$ und $m = z - T_n$ (Man beachte, daß $T_{n+1} - T_n = n + 1$, und damit $0 \leqslant m < n$). D.h.; aber, daß $\pi(n, m) = \pi(n + m, 0) + m =$

$T_n + z - T_n = z$, und auch, daß m, n die einzigen Zahlen mit dieser Eigenschaft sind.

Sei nun $\pi(x, y) = \pi(x', y')$. Wieder wie oben, bzw. bei der Herleitung der Formel in den Folien, ist $\pi(x, y) = \pi(x + y, 0) + y = \pi(x' + y', 0) + y'$. Da es, wie oben

Der Rest folgt jetzt mit Induktion über k. Der Induktionsanfang $k = 2$ ist nur die Bijektivität von π wie oben gezeigt. Sei jetzt $z \in \mathbb{N}$ beliebig. Da π bijektiv ist gibt es $x_1, y \in \mathbb{N}$, so daß $\pi(x_1, y) = z$. Des Weiteren, da nach Induktionsannahme $\langle \cdot \rangle^k$ surjektiv ist gibt es $x_2, \ldots, x_{k+1}$, so daß $\langle x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle^k = y$. Zusammen haben wir

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle^{k+1} = \pi(x_1, \langle x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle^k) = \pi(x_1, y) = z\ .$$

Also haben wir die Surjektivität gezeigt. Sei jetzt

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle^{k+1} = \langle x_1', x_2', \ldots, x_{k+1}' \rangle^{k+1}$$

Also

$$\pi(x_1, \langle x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle^k) = \pi(x_1, \langle , x_2', \ldots, x_{k+1}' \rangle^k)\ .$$

Da π injektiv ist ist also $x_1 = x_1'$ und

$$\langle x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle^k = \langle x_2', \ldots, x_{k+1}' \rangle^k$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist jetzt auch noch $x_2 = x_2', \ldots, x_{k+1} = x_{k+1}'$.

3. (a) Bestimmen Sie $\langle 3, 1, 4 \rangle^3$ und $\langle 3, 1, 4 \rangle^*$.
   (b) Geben Sie ein Beispiel, daß zeigt, daß $\langle \rangle^*$ nicht surjektiv ist.
   (c) Bestimmen Sie $(666)_2^3$

Lösung:

(a) $\langle 3, 1, 4 \rangle^3 = \pi(3, \langle 1, 4 \rangle^2) = \pi(3, \pi(1, 4)) = 272$ und

$$\langle 3, 1, 4 \rangle^* = \langle 3, 3, \langle 1, 4 \rangle^* \rangle^3 = \left\langle 3, 3, \langle 2, 1, \langle 4 \rangle^* \rangle^3 \right\rangle^3 =$$
$$\left\langle 3, 3, \left\langle 2, 1, \langle 1, 4, \langle \rangle^* \rangle^3 \right\rangle^3 \right\rangle^3 = \left\langle 3, 3, \left\langle 2, 1, \langle 1, 4, 0 \rangle^3 \right\rangle^3 \right\rangle^3 =$$
$$\langle 3, 3, 1078 \rangle^3 = \langle 3, 3, 1078 \rangle^3 = 171641455652\ .$$

(b) Wie man leicht sieht ist $\langle 0, n \rangle^*$ für kein $n \in \mathbb{N}$ im Bild der Abbildung ($\langle x_1, \ldots, x_k \rangle^* = \pi(m, z)$ mit $m \geqslant 1$ für alle k und damit $\neq \pi(0, z)$. Der Fall $\langle \rangle^* = 0$ ist ebenfalls ausgeschlossen).

(c) $(666)_2^3 = \pi_1(\pi_2(666)) = \pi_1(0) = 0$. Wie man leicht sieht ist $\langle 36, 0, 0 \rangle^3 = \pi(36, \pi(0, 0)) = 666$.

4. Die Folge von Fibonacci Zahlen (F_n) ist bekanntermaßen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \;;$$

d.h. die ersten beiden Fibonacci Zahlen sind 1 und jede weitere Zahl ist die Summe ihrer zwei Vorgänger. Zeigen Sie, daß die Funktion, die jedem n die n-te Fibonacci Zahl zuordnet primitiv rekursiv ist.
Tipp: Verwenden Sie Tupelkodierungen indem sie zuerst zeigen, daß die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $g(\pi(F_n, F_{n+1})) = \pi(F_{n+1}, F_{n+2})$ primitiv rekursiv ist.

Lösung: Die Lösung ist ja schon fast im Tipp gegeben.

5. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale μ-rekursive Funktion. Zeigen Sie, daß auch die folgenden beiden Funktionen total und μ-rekursiv sind:

   - Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Zahlen $f(0), \ldots, f(n)$ zuordnet.
   - Die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl m zuordnet, so dass $f(m)$ das Maximum der Zahlen $f(0), \ldots, f(n)$ ist.

Lösung:

   - g erfüllt die primitive Rekursion

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g(n+1) &= \max g(n), f(n+1) \end{aligned}$$

   Da $\lambda m, n. \max m, f(n+1)$ μ-rekursiv ist, ist somit auch g μ-rekusiv.
   - Die Funktion h erhält man ebenfalls durch primitive Rekursion aus

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(n+1) &= h(n) + ((n+1) - h(n))\mathrm{sg}\,(f(n+1) - f(h(n))) \end{aligned}$$

   Zur Erklärung: ist $f(n+1)$ größer als $f(h(n))$, also das Maximum der Werte $f(0), \ldots, f(n)$, so ist die Signums-Funktion 1 und damit ist $h(n+1) = n+1$. Ansonsten ist die Funktion $h(n)$, da $f(h(n))$ ja dann auch Maximum der Werte $f(0), \ldots, f(n+1)$ ist.

6. Zeigen Sie, daß für die Ackermann-Funktion gilt: $B(n, x) > x$ für alle n.
Tipp: Zwei geschachtelte Induktionen über n und x.

Lösung: Wir führen Zunächst eine Induktion über n:

   - $n = 0$: Klar, nach Definition von B.
   - $n \to n+1$: Wiederum mit Induktion über x: Induktionsanfang ist wieder klar, da $B(n+1, 0) = 1 > 0$. Für den Induktionsschritt $x \to x+1$ können wir die Rekursiongleichung $B(n+1, x+1) =$

$B(n, B(n+1, x))$ verwenden. Da wir die Aussage schon für n gezeigt haben ist dann

$$B(n+1, x+1) = B(n, B(n+1, x)) > B(n+1, x) \ .$$

Letzteres ist echt größer, nach IV von x als x. Insgesamt haben wir also

$$B(n+1, x+1) > B(n+1, x) > x$$

und damit muss $B(n+1, x+1) > x+1$ sein.