Lösungen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1

a. Sei R die Menge der erreichbaren Nichtterminalzeichen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei R_n die Menge aller $A \in R$, die man mit einer Ableitung der Länge $\leq n$ erreichen kann. Dann gilt offensichtlich

$$R_0 = \{S\}$$
$$R_{n+1} = R_n \cup \{B \in N \mid \exists A \in R_n, \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*.\ (A \to \alpha B \beta) \in P\}$$
$$R_n \subseteq R_{n+1} \text{ für alle } n \geq 0$$
$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

Da alle R_n in der endlichen Menge N enthalten sind, kann die Folge $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots$ nicht echt aufsteigend sein, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n = R_{n+1}$. Dann gilt sogar $R_n = R_{n+i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit $R = R_n$. Also braucht man nur die Mengen $R_0, R_1, R_2, \ldots$ zu berechnen bis (nach spätestens $|N|$ Schritten) ein $n \in \mathbb{N}$ gefunden ist mit $R_n = R_{n+1}$. Diese Menge R_n enthält dann genau die erreichbaren Nichtterminalzeichen.

b. Sei Pr die Menge aller produktiven Nichtterminalzeichen, d.h. die Menge aller $A \in N$, für die ein Ableitungsbaum mit Wurzel A und Blattwort $w \in \Sigma^*$ existiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Pr_n die Menge aller $A \in Pr$, für die ein solcher Ableitungsbaum mit Höhe $\leq n$ existiert. Dann gilt offensichtlich

$$Pr_0 = \emptyset$$
$$Pr_{n+1} = Pr_n \cup \{A \in N \mid \exists \beta \in (Pr_n \cup \Sigma)^*.\ (A \to \beta) \in P\}$$
$$Pr_n \subseteq Pr_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$Pr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Pr_n$$

Die weitere Argumentation verläuft wie in **a.**, also braucht man auch hier nur die Mengen $Pr_0, Pr_1, Pr_2, \ldots$ zu berechnen bis ein $n \in \mathbb{N}$ gefunden ist mit $Pr_n = Pr_{n+1}$. Diese Menge Pr_n enthält dann genau die produktiven Nichtterminalzeichen.

c. Es gilt $L(G) \neq \emptyset \Leftrightarrow S \in Pr$, also braucht man nur Pr nach dem Algorithmus aus **b.** zu berechnen (wobei man den Algorithmus schon abbrechen kann sobald S in einer der Mengen Pr_n enthalten ist).

d. Man muss $L(G) \neq \emptyset$ voraussetzen (damit wenigstens das Startzeichen produktiv ist). Dann wähle man $G' = (\Sigma, N', S, P')$ mit $N' = R \cap Pr$ und $P' = \{(A \to \beta) \in P \mid A \in N' \wedge \beta \in (N' \cup \Sigma)^*\}$. Wegen $P' \subseteq P$ gilt $L(G') \subseteq L(G)$, also bleibt '$\supseteq$' zu zeigen. Sei $w \in L(G)$, d.h. $w \in \Sigma^*$

und $S \Rightarrow_G^* w$. Da in einer solchen Ableitung nur erreichbare produktive Nichtterminalzeichen auftreten können, müssen alle verwendeten Produktionen in P' liegen. Also gilt $S \Rightarrow_{G'}^* w$, d.h. $w \in L(G')$.

Anwendungsbeispiel:

Sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit

$\Sigma = \{a, b\}$

$N = \{S, A, B, C, D\}$

$P = \{S \to aA,\ S \to Bb,\ C \to a,\ B \to b,\ A \to aBAD,\ A \to SBBb\}$

Mit **a.** erhält man

$$R_0 = \{S\}, \quad R_1 = \{S, A, B\}, \quad R_2 = \{S, A, B, D\} \quad R_3 = R_2$$

also $R = \{S, A, B, D\}$. Mit **b.** ergibt sich

$$Pr_0 = \emptyset,\ Pr_1 = \{B, C\},\ Pr_2 = \{S, B, C\},\ Pr_3 = \{S, A, B, C\},\ Pr_4 = Pr_3$$

also $Pr = \{S, A, B, C\}$. Mit **c.** folgt dann $L(G) \neq \emptyset$, also erhält man mit **d.** die zu G äquivalente Grammatik

$G' = (\Sigma, N', S, P')$ mit

$N' = R \cap Pr = \{S, A, B\}$

$P' = \{S \to aA,\ S \to Bb,\ B \to b,\ A \to SBBb\}$

Aufgabe 2

Bei den Kellerautomaten in der Vorlesung war

$$\Delta \subseteq (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*)$$

erlaubt, d.h. der Kellerautomat darf bei jedem Übergangsschritt ein Wort $u \in \Sigma^*$ von der Eingabe lesen und ein Wort $\gamma \in \Gamma^*$ vom Keller. Insbesondere darf $u = \varepsilon$ und/oder $\gamma = \varepsilon$ gelten, d.h. Eingabe und/oder Kellerinhalt dürfen bei einem Übergangsschritt ignoriert werden.

Bei den eingeschränkten Kellerautomaten ist nur noch

$$\Delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^*)$$

erlaubt, d.h. anstelle von $u \in \Sigma^*$ darf bei einem Übergangsschritt nur ein einzelnes Zeichen $a \in \Sigma$ oder das leere Wort ε gelesen werden und anstelle von $\gamma \in \Gamma^*$ darf nur ein einzelnes Zeichen des Kelleralphabets gelesen werden (also insbesondere *nicht* das leere Wort). Letzteres impliziert, dass bei leerem Keller *kein* Übergangsschritt möglich ist, also kann man nicht mit $(s, \varepsilon, \varepsilon)$ starten, sondern benötigt ein Kellerbodensymbol, das zu Beginn im Keller liegt.

Beweis der Äquivalenz:

$\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$:

Sei L kontextfrei, also $L = L(G)$ für eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$. Im Beweis zu Satz 3.21 wurde ein Kellerautomat M konstruiert mit $L = L(M)$. Mit einer ähnlichen Konstruktion erhält man einen *eingeschränkten* Kellerautomaten M' für den sogar $L = L(M') = L_f(M') = L_\varepsilon(M')$ gilt, nämlich $M' = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \#, \Delta)$ mit

- $\Gamma = N \cup \Sigma \cup \{\#\}$
- $Q = \{s, p, f\}$
- $F = \{f\}$
- $$\begin{aligned} \Delta = \ & \{((s, \varepsilon, \#), (p, S\#))\} && (1) \\ & \cup \{((p, \varepsilon, A), (p, \beta)) \mid (A \to \beta) \in P\} && (2) \\ & \cup \{((p, a, a), (p, \varepsilon)) \mid a \in \Sigma\} && (3) \\ & \cup \{((p, \varepsilon, \#), (f, \varepsilon))\} && (4) \end{aligned}$$

M' arbeitet ähnlich wie der Kellerautomat im Beweis zu Satz 3.21: Zu Beginn legt er mit (1) das Startzeichen S in den Keller und wechselt in den Zustand p. Im Zustand p kann er mit (2) Ableitungsschritte im Keller durchführen oder mit (3) ein Terminalzeichen im Keller und in der Eingabe gegeneinander aufheben. Dabei bleibt das Kellerbodensymbol die ganze Zeit im Keller liegen, d.h. es wird hier tatsächlich nur als 'Markierung des Kellerbodens' benutzt. Nach erfolgreicher Durchführung einer Ableitung $S \Rightarrow^* w$ liegt schließlich *nur* noch $\#$ im Keller und kann mit (4) entfernt werden, wobei der Kellerautomat in den Endzustand f wechselt.

Um zu zeigen, dass M' wie gewünscht arbeitet, formuliert man eine ähnliche Eigenschaft wie für den Kellerautomaten M im Beweis zu Satz 3.21, nämlich

$$\gamma \Rightarrow_G^* w \quad \Leftrightarrow \quad (p, w, \gamma\#) \vdash_{M'}^* (p, \varepsilon, \#) \qquad (*)$$

Durch $(*)$ kommt zum Ausdruck, dass M' im Zustand p tatsächlich Ableitungen der kontextfreien Grammatik G simulieren kann. Der Beweis von $(*)$

verläuft ähnlich wie bei Satz 3.21 und soll hier nicht wiederholt werden. Als Folgerung von $(*)$ erhält man

$$\begin{aligned}
w \in L(M') \quad &\Leftrightarrow \quad (s, w, \#) \vdash_{M'}^{*} (f, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\qquad \text{per Definition von } L(M') \\
&\Leftrightarrow \quad (s, w, \#) \vdash_{M'} (p, w, S\#) \vdash_{M'}^{*} (p, \varepsilon, \#) \vdash_{M'} (f, \varepsilon, \varepsilon) \\
&\qquad \text{weil für den ersten Übergangsschritt nur Transition (1)} \\
&\qquad \text{und für den letzten nur Transition (4) in Frage kommt} \\
&\Leftrightarrow \quad S \Rightarrow_{G}^{*} w \\
&\qquad \text{wegen } (*) \text{ angewandt auf die mittlere Teilfolge} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L(G) \\
&\qquad \text{per Definition von } L(G)
\end{aligned}$$

Damit ist zunächst $L = L(M')$ bewiesen. Offensichtlich gilt $L(M') \subseteq L_f(M')$ und $L(M') \subseteq L_\varepsilon(M')$, also bleibt zu zeigen, dass in beiden Fällen auch '$\supseteq$' gilt:

- $w \in L_f(M')$ bedeutet $(s, w, \#) \vdash_{M'}^{*} (f, \varepsilon, \gamma)$ für ein $f \in F$ und ein $\gamma \in \Gamma^*$. Da f nur mit (4) erreichbar ist, ist der letzte Übergangsschritt von der Form $(p, \varepsilon, \#\gamma) \vdash_{M'} (f, \varepsilon, \gamma)$, und weil $\#$ im Keller stets nur ganz unten liegen kann, folgt $\gamma = \varepsilon$ und damit $w \in L(M')$.

- $w \in L_\varepsilon(M')$ bedeutet $(s, w, \#) \vdash_{M'}^{*} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ für ein $q \in Q$. Da $\#$ nur mit (4) verschwinden kann und *nach* (4) kein Übergangsschritt mehr möglich ist, muss $q = f$ sein und damit wieder $w \in L(M')$.

b $\Rightarrow$ **d**:

Sei $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \#, \Delta)$ ein eingeschränkter Kellerautomat. Es ist zu zeigen, dass ein eingeschränkter Kellerautomat M' existiert mit $L_f(M) = L(M')$. Sei $M' = (\Sigma, \Gamma, Q', s, F', \#, \Delta')$ mit

- $Q' = Q \cup \{f'\}$ mit einem neuen Zustand $f' \notin Q$

- $F' = F \cup \{f'\}$

- $\Delta' = \Delta \cup \{\underbrace{((f, \varepsilon, X), (f', \varepsilon))}_{(1)} \mid f \in F', X \in \Gamma\}$

M' kann alle Übergänge von M durchführen und zusätzlich von jedem Endzustand f mit (1) zu f' wechseln, falls der Keller noch nicht leer ist. Beim Wechsel zu f' wird dann bereits ein Zeichen X aus dem Keller entfernt und die übrigen können ebenfalls mit (1) entfernt werden, indem man $f = f'$

wählt. Also erhält man

$$
\begin{aligned}
w \in L(M') \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f \in F'.\,(s,w,\#) \vdash^*_{M'} (f,\varepsilon,\varepsilon) \\
&\qquad \text{per Definition von } L(M') \\
&\Leftrightarrow \quad (s,w,\#) \vdash^*_{M'} (f',\varepsilon,\varepsilon) \;\vee\; \exists f \in F.\,(s,w,\#) \vdash^*_{M'} (f,\varepsilon,\varepsilon) \\
&\qquad \text{per Definition von } F' \\
&\Leftrightarrow \quad \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\,(s,w,\#) \vdash^*_{M'} (f,\varepsilon,\gamma) \\
&\qquad \text{weil } (f',\varepsilon,\varepsilon) \text{ nur mit Übergangsschritten der Form (1) aus} \\
&\qquad \text{einer Konfiguration der Form } (f,\varepsilon,\gamma) \text{ entstehen kann} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\,(s,w,\#) \vdash^*_{M} (f,\varepsilon,\gamma) \\
&\qquad \text{weil Transition (1) hier nicht mehr vorkommen kann} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L_f(M) \\
&\qquad \text{per Definition von } L_f(M)
\end{aligned}
$$

c $\Rightarrow$ **d**:

Sei $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \#, \Delta)$ ein eingeschränkter Kellerautomat und sei M' der eingeschränkte Kellerautomat, der aus M entsteht, indem man alle Zustände zu Endzuständen macht. Dann gilt offensichtlich $L_\varepsilon(M) = L(M')$.

d $\Rightarrow$ **a**:

Sei $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \#, \Delta)$ ein eingeschränkter Kellerautomat. Es ist zu zeigen, dass ein Kellerautomat M' existiert mit $L(M) = L(M')$. Man beachte, dass hier tatsächlich etwas bewiesen werden muss, weil $L(M)$ und $L(M')$ unterschiedlich definiert sind. Man wähle $M' = (\Sigma, \Gamma, Q', s', F, \Delta')$ mit

- s' ist ein neuer Startzustand, d.h. $s' \notin Q$
- $Q' = Q \cup \{s'\}$
- $\Delta' = \Delta \cup \{\underbrace{((s',\varepsilon,\varepsilon),(s,\#))}_{(1)}\}$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
w \in L(M') \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f \in F.\,(s',w,\varepsilon) \vdash^*_{M'} (f,\varepsilon,\varepsilon) \\
&\qquad \text{per Definition von } L(M') \\
&\Leftrightarrow \quad \exists f \in F.\,(s,w,\#) \vdash^*_{M'} (f,\varepsilon,\varepsilon) \\
&\qquad \text{weil der erste Übergangsschritt nur mit (1) möglich ist} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L(M) \\
&\qquad \text{per Definition von } L(M)
\end{aligned}
$$