Lösungen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Gesucht ist jeweils ein regulärer Ausdruck α_i mit $L_i = L(\alpha_i)$.

a. $L_1 = \{a^{3n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Man wähle $\alpha_1 = (aaa)^*a$.

b. $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist kein Teilwort von } w\}$.

Ein Wort w liegt genau dann in L_2 wenn auf jedes Vorkommen des Zeichens a in w entweder eine nichtleere Folge von bs folgt oder gar kein Zeichen mehr folgt. Damit ist klar, dass man $\alpha_2 = b^*(ab^+)^*(a|\varepsilon)$ wählen kann (vgl. Aufgabe 4 c. von Übungsblatt 1).

c. $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{erstes und letztes Zeichen von } w \text{ stimmen überein}\}$

Man wähle $\alpha_3 = a(a|b)^*a \mid b(a|b)^*b$

Des weiteren ist für jede der Sprachen L_i eine rechtslineare Grammatik G_i gesucht mit $L_i = L(G_i)$.

Eine rechtslineare Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ arbeitet ähnlich wie ein NDEA. Jede Ableitung in G ist von der Form

$$S \Rightarrow a_1A_1 \Rightarrow a_1a_2A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_nA_n \Rightarrow a_1 \dots a_n$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ und $A_1, \dots, A_n \in N$. Dabei enthält das Nichtterminalzeichen A_k die notwendige Information über das bereits erzeugte Teilwort $a_1 \dots a_k$ (analog zum aktuellen Zustand eines NDEA, der die notwendige Information über das bereits *gelesene* Teilwort enthält).

Mit dieser Intuition erhält man die folgenden rechtslinearen Grammatiken für die Sprachen L_i:

a. Man verwendet drei Nichtterminalzeichen A_0, A_1, A_2, wobei A_i bedeutet, dass das bereits erzeugte Teilwort von der Form a^{3n+i} ($n \in \mathbb{N}$) ist. Damit erhält man $G_1 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a\}$, $N = \{A_0, A_1, A_2\}$, $S = A_0$ und $P = \{A_0 \to aA_1,\ A_1 \to aA_2,\ A_2 \to aA_0,\ A_1 \to \varepsilon\}$.

b. Es genügen zwei Nichtterminalzeichen S und A, wobei A bedeutet, dass man als letztes ein a erzeugt hat (also im nächsten Schritt kein weiteres a erzeugen darf). Damit erhält man $G_2 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A\}$ und $P = \{S \to aA,\ S \to bS,\ S \to \varepsilon,\ A \to bS,\ A \to \varepsilon\}$.

c. Man verwendet fünf Nichtterminalzeichen S, A, A', B, B' mit folgender Bedeutung: A besagt, dass das bisher erzeugte Wort mit a beginnt und mit a endet. A' besagt, dass es mit a beginnt und mit b endet. Analog für B und B'. Damit erhält man $G_3 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A, A', B, B'\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \to aA,\ A \to aA \mid bA' \mid \varepsilon,\ A' \to aA \mid bA' \\ & S \to bB,\ B \to bB \mid aB' \mid \varepsilon,\ B' \to bB \mid aB'\ \} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gesucht ist jeweils eine kontextfreie Grammatik G_i mit $L_i = L(G_i)$. Um eine Aussage der Form $L = L(G)$ zu beweisen, muss man zeigen, dass

$$S \Rightarrow_G^* w \quad \Leftrightarrow \quad w \in L \quad \text{für alle } w \in \Sigma^* \tag{1}$$

Für '$\Rightarrow$' bietet sich eine Induktion über die Länge der Ableitung $S \Rightarrow_G^* w$ an und für '$\Leftarrow$' eine Induktion über die Größe von w. Wie bei jedem Induktionsbeweis ist es aber möglich, dass man die Behauptung zuerst verallgemeinern muss, damit der Induktionsbeweis gelingt. Dazu bieten sich—wie bereits in der Vorlesung erwähnt—zwei Möglichkeiten an:

- Man beweist eine Aussage über alle *Satzformen* der Grammatik, d.h. eine Äquivalenz der Form

$$S \Rightarrow_G^* u \quad \Leftrightarrow \quad u \in L' \quad \text{für alle } u \in (N \cup \Sigma)^* \tag{2}$$

- Man beweist für *jedes* Nichtterminalzeichen A eine Äquivalenz der Form

$$A \Rightarrow_G^* w \quad \Leftrightarrow \quad w \in L_A \quad \text{für alle } w \in \Sigma^* \tag{3}$$

Wir verwenden (2) bei der informalen Argumentation und (3) in den Beweisen. Da unsere einfachen Grammatiken meist nur das Nichtterminalzeichen S besitzen, reduziert sich (3) auf die ursprüngliche Aussage (1).

a. $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Man wähle $G_1 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a,b,c\}$, $N = \{S\}$ und

$$P = \{S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to c\}$$

Mit den ersten beiden Produktionen lassen sich genau die Wörter der Form $a_1 \ldots a_k S a_k \ldots a_1$ mit $k \geq 0$ und $a_1, \ldots, a_k \in \{a,b\}$ ableiten, also genau die Wörter der Form wSw^R mit $w \in \{a,b\}^*$. Mit der letzten Produktion lässt sich dann das S in der Mitte durch c ersetzen. Andere Ableitungen sind nicht möglich.

Beweis für $L_1 = L(G_1)$:

'$\subseteq$':

Durch Induktion über $|w|$ zeigt man $S \Rightarrow^* wcw^R$ für alle $w \in \{a,b\}^*$.

$|w| = 0$:

Dann ist $w = \varepsilon$ und $S \Rightarrow c = \varepsilon c \varepsilon^R$.

$|w| > 0$:

Dann ist $w = zv$ mit $z \in \{a, b\}$ und $|v| < |w|$. Also gilt nach Induktionsannahme $S \Rightarrow^* vcv^R$ und damit $S \Rightarrow zSz \Rightarrow^* zvcv^R z = (zv)c(zv)^R = wcw^R$.

'$\supseteq$':

Durch Induktion über n zeigt man: Wenn $S \Rightarrow^n w$ mit $w \in \Sigma^*$, dann ist $w \in L_1$.

$n = 1$:

Dann ist die Ableitung von der Form $S \Rightarrow c$ und es gilt $c = \varepsilon c \varepsilon^R \in L_1$.

$n > 1$:

Dann ist die Ableitung von der Form $S \Rightarrow zSz \Rightarrow^{n-1} w$ mit $z \in \{a, b\}$, $w = zvz$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $S \Rightarrow^{n-1} v$. Nach Induktionsannahme ist dann $v \in L_1$, d.h. es existiert ein $u \in \{a, b\}^*$ mit $v = ucu^R$. Also gilt auch $w = zvz = zucu^R z = (zu)c(zu)^R \in L_1$.

b. $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Man wähle $G_2 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S\}$ und

$$P = \{S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to \varepsilon\}$$

Wie in **a.** erhält man mit den ersten beiden Produktionen genau die Wörter der Form wSw^R und mit der letzten Produktion lässt man das S in der Mitte verschwinden. Andere Ableitungen sind nicht möglich.

Der Beweis für $L_2 = L(G_2)$ verläuft ähnlich wie in **a.**

c. $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$

Man wähle $G_3 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S\}$ und

$$P = \{S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to \varepsilon,\ S \to a,\ S \to b\}$$

Ein Wort $w \in L_3$ ist entweder von der Form vv^R mit $v \in \{a, b\}^*$ (wenn $|w|$ gerade ist) oder von der Form vzv^R mit $v \in \{a, b\}^*$ und $z \in \{a, b\}$ (wenn $|w|$ ungerade ist). Die Wörter der Form vv^R erhält man wie in **b.** und diejenigen der Form vzv^R wie in **a.** Andere Ableitungen sind nicht möglich.

Beweis für $L_3 = L(G_3)$:

'$\subseteq$':

Durch Induktion über $|w|$ zeigt man $S \Rightarrow^* w$ für alle $w \in L_3$.

$|w| \leq 1$:

Dann ist $w \in \{\varepsilon, a, b\}$ und damit $S \Rightarrow w$.

$|w| > 1$:

Wegen $w = w^R$ und $|w| > 1$ existieren $z \in \{a, b\}$ und $v \in \{a, b\}^*$ mit $w = zvz$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $v = v^R$. Nach Induktionsannahme gilt dann $S \Rightarrow^* v$, also auch $S \Rightarrow zSz \Rightarrow^* zvz = w$.

'$\supseteq$':

Durch Induktion über n zeigt man: Wenn $S \Rightarrow^n w$ mit $w \in \Sigma^*$, dann ist $w = w^R$.

$n = 1$:

Wegen $S \Rightarrow w$ gilt $w \in \{\varepsilon, a, b\}$ und damit $w = w^R$.

$n > 1$:

Dann ist die Ableitung von der Form $S \Rightarrow zSz \Rightarrow^{n-1} w$ mit $z \in \{a, b\}$, $w = zvz$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $S \Rightarrow^{n-1} v$. Nach Induktionsannahme ist dann $v = v^R$, also gilt auch $w = zvz = zv^Rz = w^R$.

d. $L_4 = \{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$

Man wähle $G_4 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S\}$ und

$$P = \{S \to aSbb,\ S \to \varepsilon\}$$

Mit der ersten Produktion erhält man genau die Wörter der Form $a^m S b^{2m}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Mit der zweiten Produktion lässt man das S verschwinden. Andere Ableitungen sind nicht möglich.

Der Beweis für $L_4 = L(G_4)$ verläuft wieder ähnlich wie in **a.**

e. $L_5 = \{a^m b^n \mid n > 2m\}$

Man wähle $G_5 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, B\}$ und

$$P = \{S \to aSbb,\ S \to B,\ B \to Bb,\ B \to b\}$$

Mit der ersten Produktion erhält man genau die Wörter der Form $a^m S b^{2m}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Mit den übrigen Produktionen erhält man anschließend aus dem S eine beliebige nichtleere Folge von bs, also insgesamt ein Wort der Form $a^m b^n$ mit $n > 2m$. Andere Ableitungen sind nicht möglich.

Beweis für $L_5 = L(G_5)$:

Zunächst ist klar, dass aus B genau die Wörter der Form b^k mit $k > 0$ ableitbar sind. Damit ergibt sich die Mengengleichheit wie folgt.

'$\subseteq$':

Durch Induktion über m zeigt man $S \Rightarrow^* a^m b^n$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $n > 2m$.

$m = 0$:

Es gilt $S \Rightarrow B \Rightarrow^* b^n$ für alle $n > 0 = 2m$.

$m \geq 1$:

Für alle $n > 2m \geq 2$ gilt $a^m b^n = aa^{m-1}b^{n-2}b^2$. Wegen $n - 2 > 2m - 2$ $= 2(m-1)$ gilt nach Induktionsannahme $S \Rightarrow^* a^{m-1}b^{n-2}$, also auch $S \Rightarrow aSb^2 \Rightarrow^* aa^{m-1}b^{n-2}b^2 = a^m b^n$.

'$\supseteq$':

Durch Induktion über k zeigt man: Wenn $S \Rightarrow^k w$ mit $w \in \Sigma^*$, dann ist $w \in L_5$.

Die Ableitung ist entweder von der Form $S \Rightarrow B \Rightarrow^* w$ oder $S \Rightarrow aSbb \Rightarrow^{k-1} w$ mit $w = avbb$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $S \Rightarrow^{k-1} v$. Im ersten Fall gilt $w = b^n = a^0 b^n$ für ein $n > 0$ also $w \in L_5$. Im zweiten Fall gilt nach Induktionsannahme $v \in L_5$ also $v = a^m b^n$ mit $n > 2m$. Dann ist $w = avbb = a^{m+1}b^{n+2}$, also $w \in L_5$ wegen $n + 2 > 2m + 2 = 2(m + 1)$.

f. $L_6 = \{a^m b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Man wähle $G_6 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, B\}$ und

$$P = \{S \to aSc,\ S \to B,\ B \to Bb,\ B \to \varepsilon\}$$

Mit der ersten Produktion erhält man genau die Wörter der Form $a^n S c^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Mit den übrigen Produktionen lässt sich das S durch eine (möglicherweise leere) Folge von bs ersetzen.

Der Beweis für $L_6 = L(G_6)$ ergibt sich ähnlich wie in **e.**

g. $L_7 = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\} \circ \{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Man wähle $G_7 = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, S_1, S_2\}$ und

$$P = \{S \to S_1 S_2,\ S_1 \to aS_1 b,\ S_1 \to \varepsilon,\ S_2 \to bS_2 c,\ S_2 \to \varepsilon\}$$

G_7 ist wie im Beweis zu Satz 3.24 aus zwei KFGs für die Sprachen $\{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ und $\{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zusammengesetzt. Deshalb ist klar, dass G_7 die Konkatenation der beiden Sprachen erzeugt.

Aufgabe 3

Nach dem Verfahren aus der Vorlesung ergibt sich der Kellerautomat M zur kontextfreien Grammatik G_7 wie folgt:

$M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ mit

- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup N = \{a, b, c, S, S_1, S_2\}$
- $Q = \{s, f\}$
- $F = \{f\}$
- $$\begin{aligned} \Delta = \{\ & ((s,\varepsilon,\varepsilon),(f,S)), && (1)\\ & ((f,\varepsilon,S),(f,S_1S_2)), && (2)\\ & ((f,\varepsilon,S_1),(f,aS_1b)), && (3)\\ & ((f,\varepsilon,S_1),(f,\varepsilon)), && (4)\\ & ((f,\varepsilon,S_2),(f,bS_2c)), && (5)\\ & ((f,\varepsilon,S_2),(f,\varepsilon)), && (6)\\ & ((f,a,a),(f,\varepsilon)), && (7)\\ & ((f,b,b),(f,\varepsilon)), && (8)\\ & ((f,c,c),(f,\varepsilon))\ \} && (9) \end{aligned}$$

Ein akzeptierender Lauf für das Wort $aabbbc$ ist

$$\begin{array}{rlll} (s, aabbbc, \varepsilon) & \vdash_M & (f, aabbbc, S) & \text{mit } (1)\\ & \vdash_M & (f, aabbbc, S_1S_2) & \text{mit } (2)\\ & \vdash_M & (f, aabbbc, aS_1bS_2) & \text{mit } (3)\\ & \vdash_M & (f, abbbc, S_1bS_2) & \text{mit } (7)\\ & \vdash_M & (f, abbbc, aS_1bbS_2) & \text{mit } (3)\\ & \vdash_M & (f, bbbc, S_1bbS_2) & \text{mit } (7)\\ & \vdash_M & (f, bbbc, bbS_2) & \text{mit } (4)\\ & \vdash_M & (f, bbc, bS_2) & \text{mit } (8)\\ & \vdash_M & (f, bc, S_2) & \text{mit } (8)\\ & \vdash_M & (f, bc, bS_2c) & \text{mit } (5)\\ & \vdash_M & (f, c, S_2c) & \text{mit } (8)\\ & \vdash_M & (f, c, c) & \text{mit } (6)\\ & \vdash_m & (f, \varepsilon, \varepsilon) & \text{mit } (9) \end{array}$$

Eine Linksableitung und eine Rechtsableitung für das Wort $aabbbc$ sind

$$S \Rightarrow S_1S_2 \Rightarrow aS_1bS_2 \Rightarrow aaS_1bbS_2 \Rightarrow aabbS_2 \Rightarrow aabbbS_2c \Rightarrow aabbbc$$
$$S \Rightarrow S_1S_2 \Rightarrow S_1bS_2c \Rightarrow S_1bc \Rightarrow aS_1bbc \Rightarrow aaS_1bbbc \Rightarrow aabbbc$$

Der Syntaxbaum sei dem Leser überlassen.

Aufgabe 4

Es wird hier nur ein Kellerautomat für die Sprache L_7 angegeben. Die Ideen, die bei der Konstruktion verwendet werden, insbesondere die Ausnutzung spontaner Zustandsübergänge, lassen sich auch beim Entwurf von Kellerautomaten für die (einfacheren) Sprachen L_1 bis L_6 ausnutzen. Dies sei dem Leser überlassen.

Ein einfacher Kellerautomat M, der die Sprache L_7 akzeptiert, arbeitet in 4 Phasen: In der ersten Phase verschiebt er as von der Eingabe in den Keller, in der zweiten hebt er as im Keller gegen bs in der Eingabe auf, in der dritten verschiebt er bs in den Keller, und in der vierten hebt er bs im Keller gegen cs in der Eingabe auf. Die übergänge zwischen den einzelnen Phasen erfolgen jeweils durch einen spontanen Zustandsübergang.

Die exakte Definition des Kellerautomaten sieht so aus:

$M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \Delta)$ mit

- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \Sigma$
- $Q = \{s, p, q, f\}$
- $F = \{f\}$
- $$\begin{array}{llll} \Delta = \{ & ((s,a,\varepsilon),(s,a)), & (1) & a\text{s verschieben} \\ & ((s,\varepsilon,\varepsilon),(p,\varepsilon)), & (2) & \text{spontaner Übergang} \\ & ((p,b,a),(p,\varepsilon)), & (3) & a\text{s gegen } b\text{s aufheben} \\ & ((p,\varepsilon,\varepsilon),(q,\varepsilon)), & (4) & \text{spontaner Übergang} \\ & ((q,b,\varepsilon),(q,\varepsilon)), & (5) & b\text{s verschieben} \\ & ((q,\varepsilon,\varepsilon),(f,\varepsilon)), & (6) & \text{spontaner Übergang} \\ & ((f,c,b),(f,\varepsilon)) \ \} & (7) & b\text{s gegen } c\text{s aufheben} \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass tatsächlich $L_7 = L(M)$ gilt:

'$\subseteq$': Sei $w \in L_7$, also $w = a^m b^{m+n} c^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rlll} (s,w,\varepsilon) = (s, a^m b^{m+n} c^n, \varepsilon) & \vdash_M^m & (s, b^{m+n}c^n, a^m) & \text{mit } (1) \\ & \vdash_M & (p, b^{m+n}c^n, a^m) & \text{mit } (2) \\ & \vdash_M^m & (p, b^n c^n, \varepsilon) & \text{mit } (3) \\ & \vdash_M & (q, b^n c^n, \varepsilon) & \text{mit } (4) \\ & \vdash_M^n & (q, c^n, b^n) & \text{mit } (5) \\ & \vdash_M & (f, c^n, b^n) & \text{mit } (6) \\ & \vdash_M^n & (f, \varepsilon, \varepsilon) & \text{mit } (7) \end{array}$$

also ist $w \in L(M)$. Man beachte, dass nur *ein* akzeptierender Lauf angegeben werden muss. Man darf also annehmen, dass der Kellerautomat stets "das Richtige tut" und insbesondere die spontanen Zustandsübergänge stets zum richtigen Zeitpunkt ausführt.

'$\supseteq$': Sei $w \in L(M)$, d.h.

$$(s, w, \varepsilon) \ \vdash_M^* \ (f, \varepsilon, \varepsilon) \qquad (*)$$

Da man von s nur über p und q zum Endzustand f gelangen kann, muss es $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$ geben so, dass sich $(*)$ wie folgt aufteilen lässt:

$$\begin{array}{rlll} (s, w, \varepsilon) & \vdash_M^m & (s, w_1, a^m) & \text{mit (1)} \\ & \vdash_M & (p, w_1, a^m) & \text{mit (2)} \\ & \vdash_M^k & (p, w_2, a^{m-k}) & \text{mit (3)} \\ & \vdash_M & (q, w_2, a^{m-k}) & \text{mit (4)} \\ & \vdash_M^n & (q, w_3, b^n a^{m-k}) & \text{mit (5)} \\ & \vdash_M & (f, w_3, b^n a^{m-k}) & \text{mit (6)} \\ & \vdash_M^l & (f, \varepsilon, \varepsilon) & \text{mit (7)} \end{array}$$

Dann muss aber gelten:

- $w = a^m w_1$ wegen der ersten Zeile
- $w_1 = b^k w_2$ wegen der dritten Zeile
- $w_2 = b^n w_3$ wegen der fünften Zeile
- $w_3 = c^n$ und $k = m$ wegen der siebten Zeile

Zusammen ergibt sich daraus $w = a^m b^m b^n c^n = a^m b^{m+n} c^n \in L_7$.

Aufgabe 5

a. Seien $G_1 = (\Sigma, N_1, S_1, P_1)$ und $G_2 = (\Sigma, N_2, S_2, P_2)$ kontextfreie Grammatiken. Es ist zu zeigen, dass eine kontextfreie Grammatik G existiert mit $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Wir dürfen annehmen, dass $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ist (denn dies kann man durch Umbenennung von Nichtterminalzeichen erreichen). Dann erhält man die gewünschte Grammatik G wie folgt.

$G = (\Sigma, N, S, P)$ mit

- S ist ein neues Nichtterminalzeichen, d.h. $S \notin N_1 \cup N_2$
- $N = \{S\} \cup N_1 \cup N_2$
- $P = \{S \to S_1,\ S \to S_2\} \cup P_1 \cup P_2$

Es bleibt zu zeigen, dass tatsächlich $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$ gilt.

'$\supseteq$':

Sei $w \in L(G_i)$ für ein $i \in \{1, 2\}$, d.h. $S_i \Rightarrow_{G_i}^* w$. Dann gilt wegen $P_i \subseteq P$ auch $S_i \Rightarrow_G^* w$ und damit $S \Rightarrow_G S_i \Rightarrow_G^* w$, also $w \in L(G)$.

'$\subseteq$':

Sei $w \in L(G)$, also $S \Rightarrow_G^* w$. Da S ein neues Zeichen ist, kann der erste Schritt in dieser Ableitung nur mit einer der beiden neuen Produktionen $S \to S_i$ erfolgt sein, d.h. es gilt $S \Rightarrow_G S_i \Rightarrow_G^* w$ für ein $i \in \{1, 2\}$. Wegen $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ können alle Schritte in $S_i \Rightarrow_G^* w$ nur mit Produktionen aus P_i erfolgt sein. Also gilt auch $S_i \Rightarrow_{G_i}^* w$ und damit $w \in L(G_i)$.

b. wurde bereits in der Vorlesung bewiesen.

c. Sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. Es ist zu zeigen, dass eine kontextfreie Grammatik G^R existiert mit $L(G^R) = L(G)^R$.

Eine solche Grammatik G^R erhält man, indem man die Produktionen von G spiegelt, d.h. man wählt

$$G^R = (\Sigma, N, S, P^R) \quad \text{mit} \quad P^R = \{A \to \gamma^R \mid (A \to \gamma) \in P\}$$

Um zu zeigen, dass tatsächlich $L(G^R) = L(G)^R$ gilt, beweist man zunächst, dass sich jeder einzelne Ableitungsschritt spiegeln lässt, d.h. dass für alle $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$ gilt

$$\alpha \Rightarrow_G \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^R \Rightarrow_{G^R} \beta^R \tag{4}$$

Beweis von (4):

Wegen der Symmetrie genügt es '$\Rightarrow$' zu zeigen. Sei also $\alpha \Rightarrow_G \beta$, d.h. es existieren $u, v \in (N \cup \Sigma)^*$ und $(A \to \gamma) \in P$ mit $\alpha = uAv$ und $\beta = u\gamma v$. Wegen $\alpha^R = v^R A u^R$, $\beta^R = v^R \gamma^R u^R$ und $(A \to \gamma^R) \in P^R$ folgt daraus $\alpha^R \Rightarrow_{G^R} \beta^R$.

Aus (4) folgt leicht (durch Induktion über die Länge der Ableitung), dass sich auch eine *Folge* von Ableitungsschritten spiegeln lässt, d.h. dass

$$\alpha \Rightarrow_G^* \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^R \Rightarrow_{G^R}^* \beta^R \tag{5}$$

für alle $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$ gilt. Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
w \in L(G) \quad &\Leftrightarrow \quad S \Rightarrow_G^* w \\
&\qquad\quad \text{per Definition von } L(G) \\
&\Leftrightarrow \quad S \Rightarrow_{G^R}^* w^R \\
&\qquad\quad \text{wegen (5)} \\
&\Leftrightarrow \quad w^R \in L(G^R) \\
&\qquad\quad \text{per Definition von } L(G^R)
\end{aligned}$$

also $L(G^R) = \{w^R \mid w \in L(G)\} = L(G)^R$.