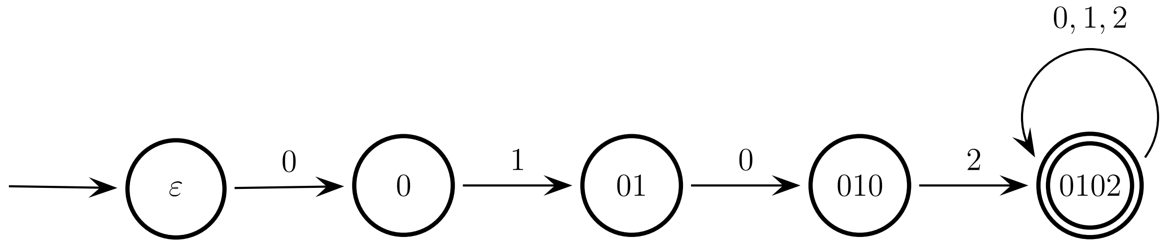
Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ und $u = 0102$. Gesucht ist der minimale DEA der die Sprache

$$L_u = \{w \in \Sigma^* \mid u \text{ ist Teilwort von } w\}$$

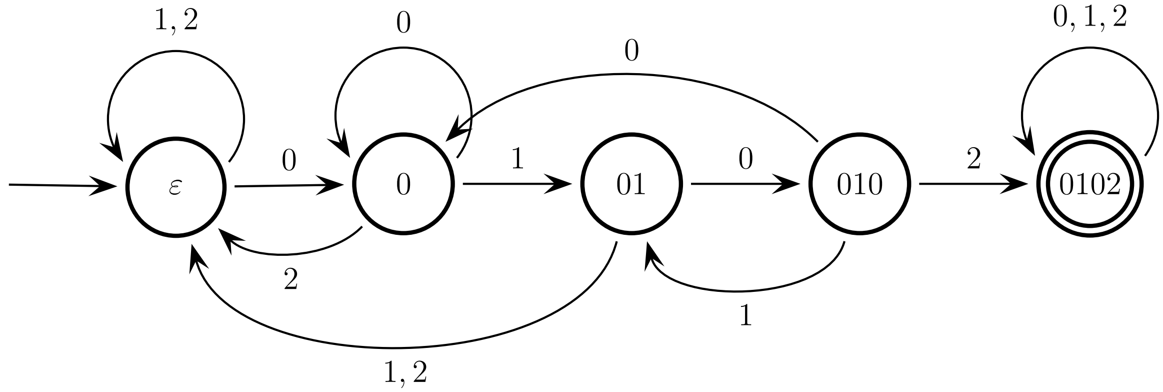
erkennt. Laut Vorlesung ist das “Rückgrat” des DEA von der Form



und die nichttrivialen Übergänge sind

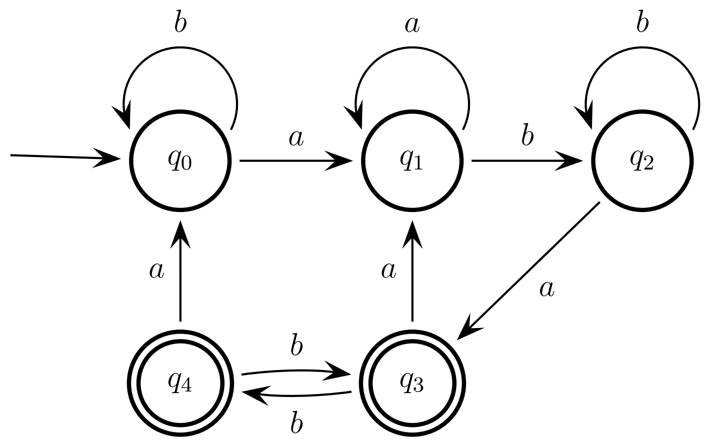
- $\delta(\varepsilon, 1) = \varepsilon$ weil ε längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(1)$
- $\delta(\varepsilon, 2) = \varepsilon$ weil ε längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(2)$
- $\delta(0, 0) = 0$ weil 0 längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(00)$
- $\delta(0, 2) = \varepsilon$ weil ε längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(02)$
- $\delta(01, 1) = \varepsilon$ weil ε längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(011)$
- $\delta(01, 2) = \varepsilon$ weil ε längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(012)$
- $\delta(010, 0) = 0$ weil 0 längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(0100)$
- $\delta(010, 1) = 01$ weil 01 längstes Wort in $\mathit{Pref}(u) \cap \mathit{Suff}(0101)$

also insgesamt



Aufgabe 2

Sei A der DEA



Um A zu minimieren, berechnet man die Äquivalenzrelation $\sim_A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sim_n$.

$\sim_0$: hat die beiden Äquivalenzklassen $F = \{q_3, q_4\}$ und $Q \setminus F = \{q_0, q_1, q_2\}$.

$\sim_1$: Wegen $\delta(q_0, a) = q_1 \sim_0 q_1 = \delta(q_1, a)$ und $\delta(q_0, b) = q_0 \sim_0 q_2 = \delta(q_1, b)$ gilt $q_0 \sim_1 q_1$. Wegen $\delta(q_0, a) = q_1 \not\sim_0 q_3 = \delta(q_2, a)$ gilt $q_0 \not\sim_1 q_2$. Also zerfällt die $\sim_0$-Äquivalenzklasse $\{q_0, q_1, q_2\}$ in zwei $\sim_1$-Äquivalenzklassen $\{q_0, q_1\}$ und $\{q_2\}$. Wegen $\delta(q_3, a) = q_1 \sim_0 q_0 = \delta(q_4, a)$ und $\delta(q_3, b) = q_4 \sim_0 q_3 = \delta(q_4, b)$ folgt $q_3 \sim_1 q_4$, d.h. die $\sim_0$-Äquivalenzklasse $\{q_3, q_4\}$ bleibt als $\sim_1$-Äquivalenzklasse erhalten.

$\sim_2$: Wegen $\delta(q_0, b) = q_0 \not\sim_1 q_2 = \delta(q_1, b)$ gilt $q_0 \not\sim_2 q_1$, also zerfällt die $\sim_1$-Äquivalenzklasse $\{q_0, q_1\}$ in zwei $\sim_2$-Äquivalenzklassen $\{q_0\}$ und $\{q_1\}$. Wegen $\delta(q_3, a) = q_1 \sim_1 q_0 = \delta(q_4, a)$ und $\delta(q_3, b) = q_4 \sim_1 q_3 = \delta(q_4, b)$ folgt $q_3 \sim_2 q_4$, d.h. die $\sim_1$-Äquivalenzklasse $\{q_3, q_4\}$ bleibt auch als $\sim_2$-Äquivalenzklasse erhalten.

$\sim_3$: Wegen $\delta(q_3, a) = q_1 \not\sim_2 q_0 = \delta(q_4, a)$ zerfällt schließlich auch noch die $\sim_2$-Äquivalenzklasse $\{q_3, q_4\}$ in zwei $\sim_3$-Äquivalenzklassen $\{q_3\}$ und $\{q_4\}$. Also besteht $\sim_3$ und damit auch $\sim_A$ aus lauter einelementigen Äquivalenzklassen, d.h. der DEA A ist selbst schon minimal.

Aufgabe 3

Um nachzuweisen, dass eine Sprache L *nicht* regulär ist, genügt es nach dem (starken) Pumping Lemma für reguläre Sprachen zu zeigen: Für jedes $n \geq 1$ existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$ so, dass für alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ (und $|uv| \leq n$) ein Pumpfaktor $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $uv^i w \notin L$.

a. $L_1 = \{a^m b^n \mid m > 3n\}$

Sei $n \geq 1$. Man wähle $x = a^{3n+1}b^n$. Dann ist $x \in L_1$ wegen $3n+1 > 3n$ und $|x| = 4n+1 \geq n$. Sei $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$. Dann gilt $v = a^k$ für ein $k \geq 1$. Also ist $uv^0w = a^{3n+1-k}b^n \notin L_3$ wegen $3n+1-k \leq 3n$.

b. $L_2 = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sei $n \geq 1$. Man wähle $x = a^{n^3}$. Dann ist $x \in L_2$ und $|x| = n^3 \geq n$. Sei $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$. Dann ist $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq n$. Also ist $uv^2w = a^{n^3+k} \notin L_2$, denn wegen $n^3 < n^3 + k \leq n^3 + n < n^3 + 3n^2 + 3n+1 = (n+1)^3$ liegt n^3+k *zwischen* den beiden aufeinander folgenden dritten Potenzen n^3 und $(n+1)^3$ und kann damit selbst *keine* dritte Potenz sein.

c. $L_3 = \{a^{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sei $n \geq 1$. Man wähle $x = a^{3^n}$. Dann ist $x \in L_3$ und $|x| = 3^n \geq n$. Sei $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$. Dann ist $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq n$. Also ist $uv^2w = a^{3^n+k} \notin L_3$, denn wegen $3^n < 3^n + k \leq 3^n + n < 3^n + 2 \cdot 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$ liegt $3^n + k$ *zwischen* den beiden aufeinander folgenden 3er-Potenzen 3^n und 3^{n+1} und kann damit selbst *keine* 3er-Potenz sein.

d. $L_4 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Sei $n \geq 1$. Man wähle $x = a^n b a^n b$. Dann ist $x \in L_4$ und $|x| = 2n+2 \geq n$. Sei $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$. Dann liegt v ganz in der ersten Gruppe von as, also ist $v = a^k$ für ein $k \geq 1$ und es gilt $uv^2w = a^{n+k}ba^nb \notin L_4$ weil $n + k > n$.

e. $L_5 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Sei $n \geq 1$. Man wähle $x = a^n bba^n$. Dann ist $x \in L_5$ und $|x| = 2n+2 \geq n$. Sei $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$. Dann liegt v ganz in der ersten Gruppe von as, also ist $v = a^k$ für ein $k \geq 1$ und es gilt $uv^2w = a^{n+k}bba^n \notin L_5$ weil $n + k > n$.

f. $L_6 = \{a^m b^n \mid m < n \vee m > n^2\}$

Sei $n \geq 1$. Man wähle $x = a^{n^2+1}b^n$. Dann ist $x \in L_6$ wegen $n^2+1 > n^2$ und $|x| = n^2+n+1 \geq n$. Sei $x = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Dann ist $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq n$. Also gilt $uv^0w = a^{n^2+1-k}b^n \notin L_6$ denn $n^2+1-k \leq n^2$ und wegen $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$ ist $n^2 - k + 1 \geq n^2 - n + 1 \geq n$.

Aufgabe 4

Um nachzuweisen, dass eine Sprache L *nicht* regulär ist, genügt es nach dem Satz von Myhill-Nerode, unendlich viele Wörter $w \in \Sigma^*$ zu finden, die paarweise L-unterscheidbar sind. L-Unterscheidbarkeit zweier Wörter u_1 und u_2 bedeutet, dass ein Wort $v \in \Sigma^*$ existiert mit $u_1 v \in L$ und $u_2 v \notin L$ oder umgekehrt.

a. $L_1 = \{a^m b^n \mid m > 3n\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^{3n+1} ($n \in \mathbb{N}$). Sie sind paarweise L_1-unterscheidbar, denn für alle $i < j$ gilt

(a) $a^{3j+1} b^j \in L_1$ weil $3j + 1 > 3j$

(b) $a^{3i+1} b^j \notin L_1$ weil $3i + 1 < 3j + 1$ und damit $3i + 1 \leq 3j$

b. $L_2 = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^{n^3} ($n \in \mathbb{N}$). Sie sind paarweise L_2-unterscheidbar, denn für alle $i < j$ gilt

(a) $a^{i^3} a^{3i^2+3i+1} = a^{i^3+3i^2+3i+1} = a^{(i+1)^3} \in L_2$

(b) $a^{j^3} a^{3i^2+3i+1} = a^{j^3+3i^2+3i+1} \notin L_2$

(b) sieht man wie folgt: $j^3 < j^3+3i^2+3i+1 < j^3+3j^2+3j+1 = (j+1)^3$, d.h. $j^3 + 3i^2 + 3i + 1$ liegt *zwischen* den beiden aufeinander folgenden dritten Potenzen j^3 und $(j+1)^3$ und ist damit selbst *keine* dritte Potenz.

c. $L_3 = \{a^{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^{3^n} ($n \in \mathbb{N}$). Sie sind paarweise L_3-unterscheidbar, denn für alle $i < j$ gilt

(a) $a^{3^i} a^{2\cdot 3^i} = a^{3^i+2\cdot 3^i} = a^{3\cdot 3^i} = a^{3^{i+1}} \in L_3$

(b) $a^{3^j} a^{2\cdot 3^i} = a^{3^j+2\cdot 3^i} \notin L_3$

(b) sieht man wie folgt: $3^j < 3^j + 2 \cdot 3^i < 3^j + 2 \cdot 3^j = 3 \cdot 3^j = 3^{j+1}$, d.h. $3^j + 2 \cdot 3^i$ liegt *zwischen* den beiden aufeinander folgenden 3er-Potenzen 3^j und 3^{j+1} und ist damit selbst *keine* 3er-Potenz.

d. $L_4 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter $a^n b$ ($n \in \mathbb{N}$). Sie sind paarweise L_4-unterscheidbar, denn für alle $i \neq j$ gilt

(a) $a^i b\, a^i b \in L_4$

(b) $a^j b\, a^i b \notin L_4$ weil $a^j b a^i b$ nicht von der Form ww ist.

e. $L_5 = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter $a^n b$ ($n \in \mathbb{N}$). Sie sind paarweise L_5-unterscheidbar, denn für alle $i \neq j$ gilt

(a) $a^i b\, b\, a^i \in L_5$

(b) $a^j b\, b\, a^i \notin L_5$ weil $a^j bba^i$ nicht von der Form ww^R ist.

f. $L_6 = \{a^m b^n \mid m < n \vee m > n^2\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^{n^2+1} ($n \in \mathbb{N}$). Sie sind paarweise L_6-unterscheidbar, denn für alle $i < j$ gilt

(a) $a^{j^2+1}b^{i+1} \in L_6$ weil $j^2 + 1 \geq (i+1)^2 + 1 > (i+1)^2$

(b) $a^{i^2+1}b^{i+1} \notin L_6$ weil $i + 1 \leq i^2 + 1 \leq i^2 + 2i + 1 = (i+1)^2$

Aufgabe 5

Diese Aufgabe liefert die fehlenden Fakten, die für die Entscheidungsverfahren von Blatt 3, Aufgabe 4 **b.** und **e.** nötig waren.

a. Sei $w = a_1 \ldots a_n \in L(A)$ mit $n \geq |Q|$. Man betrachte den Lauf von A für w:

$$(s, a_1 \ldots a_n) \vdash_A^* (f, \varepsilon) \quad \text{mit } f \in F$$

Der Lauf besteht aus $n + 1 \geq |Q| + 1$ Konfigurationen. Da A nur $|Q|$ Zustände besitzt, muss sich unter den ersten $|Q| + 1$ Konfigurationen ein Zustand q wiederholen, also existieren i, j mit $1 \leq i < j \leq |Q| + 1$ so, dass[1]

$$(s, a_1 \ldots a_n) \vdash_A^* (q, a_i \ldots a_n) \vdash_A^+ (q, a_j \ldots a_n) \vdash_A^* (f, \varepsilon)$$

Dann kann man die $\vdash_A^+$-Folge aus dem Lauf herausschneiden und erhält

$$(s, a_1 \ldots a_{i-1} a_j \ldots a_n) \vdash_A^* (q, a_j \ldots a_n) \vdash_A^* (f, \varepsilon)$$

also liegt auch das Wort $w' = a_1 \ldots a_{i-1} a_j \ldots a_n$ in $L(A)$ mit $|w'| = (i-1) + (n-j+1) = n - (j-i)$ und wegen $0 < j - i \leq |Q|$ folgt $n - |Q| \leq |w'| < n$.

b. Nach Voraussetzung ist die Menge $L' = \{w \in L(A) \mid |w| \geq |Q|\}$ nicht leer. Sei w' ein Wort von minimaler Länge in L'. Dann ist $w' \in L(A)$ mit $|Q| \leq |w'|$, also bleibt nur noch $|w'| < 2 \cdot |Q|$ zu zeigen.

Nach **a.** existiert ein $w'' \in L(A)$ mit $|w'| - |Q| \leq |w''| < |w'|$. Da w' minimale Länge unter den Wörtern aus L' hat, folgt $w'' \in L(A) \setminus L'$, also $|w''| < |Q|$. Daraus ergibt sich $|w'| \leq |w''| + |Q| < 2 \cdot |Q|$.

[1] im Falle $j = n + 1$ ist $a_j \ldots a_n = \varepsilon$