Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Um mit dem Schubfachprinzip zu beweisen, dass eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von *keinem* DEA akzeptiert wird, argumentiert man stets nach dem gleichen (bereits aus der Vorlesung bekannten) Muster:

Man nimmt an, dass ein DEA $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ existiert mit $L = L(A)$. Um diese Annahme zum Widerspruch zu führen, wählt man (mit Intuition) unendlich viele Wörter $w \in \Sigma^*$, die der Automat A voneinander unterscheiden müsste, um L zu erkennen. Da seine Zustandsmenge Q endlich ist, ist dies nicht möglich, d.h. es existieren mindestens zwei Wörter u_1, u_2 unter diesen unendlich vielen mit $\delta^*(s, u_1) = \delta^*(s, u_2)$. Um den Widerspruch zu erhalten, muss man dann nur noch ein passendes "Ergänzungswort" finden, d.h. ein Wort $v \in \Sigma^*$ mit $u_1 v \in L$ und $u_2 v \notin L$ (oder umgekehrt). Wegen $\delta^*(s, u_1 v) = \delta^*(s, u_2 v)$ kann A nicht das eine Wort akzeptieren und das andere ablehnen. Also ist $L \neq L(A)$.

a. $L_1 = \{a^m b^n \mid m > n\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^n mit $n \in \mathbb{N}$. Da A nur endlich viele Zustände besitzt, führen mindestens zwei Wörter a^m und a^n mit $m > n$ zum gleichen Zustand, d.h. es gilt $\delta^*(s, a^m) = \delta^*(s, a^n)$. Durch Anhängen des Wortes b^n erhält man $\delta^*(s, a^m b^n) = \delta^*(s, a^n b^n)$. Aber $a^m b^n \in L_1$ wegen $m > n$ und $a^n b^n \notin L_1$, also ist $L_1 \neq L(A)$.

b. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält mehr } a\text{'s als } b\text{'s}\}$

Hier kann man mit den gleichen Wörtern argumentieren wie in **a.**

c. $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$

Auch hier betrachtet man die unendlich vielen Wörter a^n mit $n \in \mathbb{N}$. Da A nur endlich viele Zustände besitzt, existieren zwei Zahlen $m \neq n$ mit $\delta^*(s, a^m) = \delta^*(s, a^n)$. Durch Anhängen des Wortes ba^m erhält man $\delta^*(s, a^m ba^m) = \delta^*(s, a^n ba^m)$. Aber $a^m ba^m \in L_3$ und $a^n ba^m \notin L_3$ wegen $a^n ba^m \neq a^m ba^n$, also ist $L_3 \neq L(A)$.

Man beachte, dass hier ba^m als Ergänzungswort gewählt wird und nicht a^m. Mit dem Wort a^m gelangt man nämlich nicht zum gewünschten Widerspruch: Es gilt zwar $a^m a^m = a^{2m} \in L_3$, aber auch $a^n a^m = a^{n+m}$ liegt in L_3.

d. $L_4 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^{n^2} mit $n \in \mathbb{N}$. Da A nur endlich viele Zustände besitzt, existieren zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\delta^*(s, a^{m^2}) = \delta^*(s, a^{n^2})$ und wir dürfen annehmen, dass $m < n$

gilt. Durch Anhängen des Wortes a^{2m+1} erhält man $\delta^*(s, a^{m^2+2m+1}) = \delta^*(s, a^{n^2+2m+1})$. Wegen $m^2+2m+1 = (m+1)^2$ ist $a^{m^2+2m+1} \in L_4$. Aber $a^{n^2+2m+1} \notin L_4$, denn es gilt $n^2 < n^2+2m+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$, d.h. n^2+2m+1 liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und ist damit selbst keine Quadratzahl. Also ist $L_4 \neq L(A)$.

e. $L_5 = \{a^m b^n \mid m \text{ und } n \text{ sind teilerfremd}\}$

Man betrachte die unendlich vielen Wörter a^p für alle Primzahlen p. Da A nur endlich viele Zustände besitzt, existieren zwei Primzahlen $p \neq q$ mit $\delta^*(s, a^p) = \delta^*(s, a^q)$. Durch Anhängen des Wortes b^q erhält man $\delta^*(s, a^p b^q) = \delta^*(s, a^q b^q)$. Aber $a^p b^q \in L_5$ wegen $ggT(p,q) = 1$ und $a^p b^p \notin L_5$ wegen $ggT(p,p) = p \neq 1$. Also ist $L_5 \neq L(A)$.

Aufgabe 2

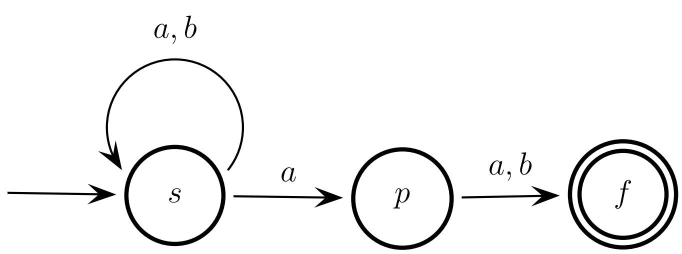
$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ das vorletzte Zeichen von } w \text{ ist ein } a\}$

a. Offensichtlich gilt $L = \{a,b\}^* \circ \{a\} \circ \{a,b\}$, also ist L regulär.

b. Ein NDEA, der die Sprache L erkennt ist $A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ mit $\Sigma = \{a,b\}$, $Q = \{s,p,f\}$, $S = \{s\}$, $F = \{f\}$ und

$$\Delta = \{(s,a,s),\ (s,b,s),\ (s,a,p),\ (p,a,f),\ (p,b,f)\}$$

Graphisch:



c. $L \subseteq L(A)$, denn:

Sei $w \in L$, d.h. $w = uav$ mit $u \in \{a,b\}^*$ und $v \in \{a,b\}$. Dann gilt

$$(s,w) = (s,uav) \ \vdash_A^* \ (s,av) \ \vdash_A \ (p,v) \ \vdash_A \ (f,\varepsilon)$$

also $w \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L$, denn:

Sei $w \in L(A)$, d.h. $(s,w) \vdash_A^* (f,\varepsilon)$. Da f nur über p erreichbar ist, kann diese Folge nur von der Form

$$(s,w) \ \vdash_A^* \ (s,av) \ \vdash_A \ (p,v) \ \vdash_A (f,\varepsilon)$$

sein. Das ist nur möglich, wenn $v \in \{a,b\}$ und wenn ein $u \in \{a,b\}^*$ existiert mit $w = uav$. Also ist $w \in \{a,b\}^* \circ \{a\} \circ \{a,b\} = L$.

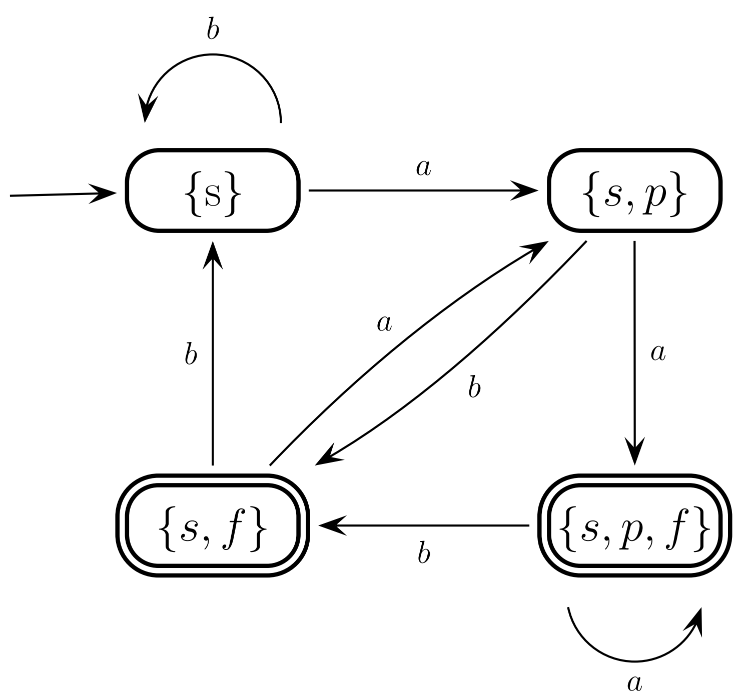
d. Der Potenzautomat zu A ist $A' = (\Sigma, Q', s', F', \delta)$ mit $Q' = \wp(Q)$, $s' = S = \{s\}$, $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\} = \{P \subseteq Q \mid f \in P\}$ und

$$\delta : Q' \times \Sigma \to Q'$$
$$\delta(P, a) \;=\; \{q \in Q \mid \exists\, p \in P.\ (p, a, q) \in \Delta\}$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle

δ	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{s\}$	$\{s,p\}$	$\{s\}$
$\{p\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
$\{f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{s,p\}$	$\{s,p,f\}$	$\{s,f\}$
$\{s,f\}$	$\{s,p\}$	$\{s\}$
$\{p,f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
$\{s,p,f\}$	$\{s,p,f\}$	$\{s,f\}$

e. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass nur die Zustände $\{s\}, \{s,p\}, \{s,f\}$ und $\{s,p,f\}$ erreichbar sind. Die Endzustände sind diejenigen, die f enthalten. Also sieht der erreichbare Teil von A' so aus:



Aufgabe 3

a. Sei $A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ ein NDEA mit $S = \emptyset$. Dann gilt per Definition

$$L(A) \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid \exists\, s \in \emptyset, f \in F.\ (s, w) \vdash_A^* (f, \varepsilon)\} \;=\; \emptyset$$

b. Der Potenzautomat zu A ist $A' = (\Sigma, Q', s', F', \delta)$ mit $Q' = \wp(Q)$, $s' = S = \emptyset \in Q'$, $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$ und

$$\begin{aligned} &\delta : Q' \times \Sigma \to Q' \\ &\delta(P, a) \;=\; \{q \in Q \mid \exists\, p \in P.\ (p, a, q) \in \Delta\} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für den Startzustand $s' = \emptyset$:

(a) $s' \notin F'$ wegen $s' \cap F = \emptyset \cap F = \emptyset$

(b) $\delta(s', a) = \delta(\emptyset, a) = \{q \in Q \mid \exists\, p \in \emptyset.\ (p, a, q) \in \Delta\} = \emptyset = s'$ für alle $a \in \Sigma$.

Aus (b) folgt $\delta^*(s, w) = s'$ für alle $w \in \Sigma^*$, also ist wegen (a) auch $L(A') = \emptyset$.

Aufgabe 4

Zum Zeitpunkt der Aufgabenstellung war nur bekannt, dass (wegen der Potenzmengenkonstruktion) $\mathcal{L}_{\text{DEA}} = \mathcal{L}_{\text{NDEA}}$ gilt. Deshalb werden hier keine ε-NDEAS zur Lösung der Aufgabe verwendet.

Sei $L \in \mathcal{L}_{\text{DEA}} = \mathcal{L}_{\text{NDEA}}$ eine Sprache über dem Alphabet Σ.

a. Sei $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ ein DEA mit $L = L(A)$. Sei $\bar{A}$ der DEA, der aus A entsteht, indem man die Endzustände mit den Nicht-Endzuständen vertauscht, d.h. $\bar{A} = (\Sigma, Q, s, \bar{F}, \delta)$ mit $\bar{F} = Q \setminus F$. Dann wird die Sprache $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ von $\bar{A}$ erkannt, denn:

$$\begin{aligned} w \in L(\bar{A}) \quad &\Leftrightarrow \quad \delta^*(s, w) \in \bar{F} \\ & \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\ &\Leftrightarrow \quad \delta^*(s, w) \notin F \\ & \quad \text{per Definition von } \bar{F} \\ &\Leftrightarrow \quad w \in \Sigma^* \setminus L(A) = \bar{L} \\ & \quad \text{per Definition des Akzeptierens, weil } A \text{ ein DEA ist} \end{aligned}$$

Also ist $\bar{L} \in \mathcal{L}_{\text{DEA}}$.

b. Sei $A = (\Sigma, Q, S, F, \Delta)$ ein NDEA mit $L = L(A)$. Sei A^R der NDEA, der aus A entsteht, indem man die Startzustände mit den Endzuständen vertauscht und die Pfeile umkehrt, d.h. $A^R = (\Sigma, Q, S^R, F^R, \Delta^R)$ mit $S^R = F$, $F^R = S$ und $\Delta^R = \{(q, a, p) \in Q \times \Sigma \times Q \mid (p, a, q) \in \Delta\}$. Dann wird die Sprache L^R von A^R erkannt, denn:

Durch Induktion über $|w|$ lässt sich zunächst leicht beweisen, dass

$$(p, w) \vdash^*_{A^R} (q, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad (q, w^R) \vdash^*_A (p, \varepsilon) \tag{1}$$

für alle $p, q \in Q$ und alle $w \in \Sigma^*$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
w \in L(A^R) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, p \in S^R, q \in F^R.\, (p, w) \vdash^*_{A^R} (q, \varepsilon) \\
& \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, p \in S^R, q \in F^R.\, (q, w^R) \vdash^*_A (p, \varepsilon) \\
& \quad \text{wegen (1)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, p \in F, q \in S.\, (q, w^R) \vdash^*_A (p, \varepsilon) \\
& \quad \text{per Definition von } S^R \text{ und } F^R \\
&\Leftrightarrow \quad w^R \in L(A) \\
& \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in L(A)^R = L^R \\
& \quad \text{wegen } (w^R)^R = w
\end{aligned}$$

Also ist $L^R \in \mathcal{L}_{\text{NDEA}} = \mathcal{L}_{\text{DEA}}$.

c. Sei $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ ein DEA mit $L = L(A)$. Ein Zustand $q \in Q$ heißt *lebendig* wenn er nicht tot ist, d.h. wenn man von q aus einen Endzustand erreichen kann. Sei A' der DEA, der aus A entsteht, indem man alle lebendigen Zustände zu Endzuständen macht, d.h. $A' = (\Sigma, Q, s, F', \delta)$ mit $F' = \{q \in Q \mid \exists\, w \in \Sigma^*.\, \delta^*(q, w) \in F\}$. Dann wird die Sprache $\mathit{Pref}(L)$ von A' erkannt, denn:

$$\begin{aligned}
w \in L(A') \quad &\Leftrightarrow \quad \delta^*(s, w) \in F' \\
& \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, q \in Q, v \in \Sigma^*.\, \delta^*(s, w) = q \wedge \delta^*(q, v) \in F \\
& \quad \text{per Definition von } F' \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, v \in \Sigma^*.\, \delta^*(s, wv) \in F \\
& \quad \text{wegen } \delta^*(s, wv) = \delta^*(\delta^*(s, w), v) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, v \in \Sigma^*.\, wv \in L(A) \\
& \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in \mathit{Pref}(L(A)) = \mathit{Pref}(L) \\
& \quad \text{per Definition des Begriffs “Präfix”}
\end{aligned}$$

Also ist $\mathit{Pref}(L) \in \mathcal{L}_{\text{DEA}}$.

d. Sei $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ ein DEA mit $L = L(A)$. Sei A' der NDEA, der aus A entsteht, indem man alle erreichbaren Zustände zu Startzuständen macht, d.h. $A' = (\Sigma, Q, S', F, \delta)$ mit $S' = \{q \in Q \mid \exists\, w \in \Sigma^*.\ \delta^*(s, w) = q\}$. Dann wird die Sprache $\mathit{Suff}(L)$ von A' erkannt,[1] denn:

$$\begin{aligned}
w \in L(A') \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, s' \in S', \delta^*(s', w) \in F \\
& \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, v \in \Sigma^*.\ \delta^*(\delta^*(s, v), w) \in F \\
& \quad \text{per Definition von } S' \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, v \in \Sigma^*.\ \delta^*(s, vw) \in F \\
& \quad \text{wegen } \delta^*(s, vw) = \delta^*(\delta^*(s, v), w) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, v \in \Sigma^*.\ vw \in L(A) \\
& \quad \text{per Definition des Akzeptierens} \\
&\Leftrightarrow \quad w \in \mathit{Suff}(L(A)) = \mathit{Suff}(L) \\
& \quad \text{per Definition des Begriffs “Suffix”}
\end{aligned}$$

Also ist $\mathit{Suff}(L) \in \mathcal{L}_{\text{NDEA}} = \mathcal{L}_{\text{DEA}}$.

Eine alternative Lösung zu **d.** erhält man, indem man **b.** und **c.** ausnutzt: Für jede Sprache L gilt offensichtlich $\mathit{Suff}(L) = (\mathit{Pref}(L^R))^R$, also gilt:

$$\begin{aligned}
L \in \mathcal{L}_{DEA} \quad &\Rightarrow \quad L^R \in \mathcal{L}_{DEA} \\
& \quad \text{wegen } \mathbf{b.} \\
&\Rightarrow \quad \mathit{Pref}(L^R) \in \mathcal{L}_{DEA} \\
& \quad \text{wegen } \mathbf{c.} \\
&\Rightarrow \quad \mathit{Suff}(L) \in \mathcal{L}_{DEA} \\
& \quad \text{wegen } \mathbf{b.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die beiden Teilaufgaben sind Spezialfälle der folgenden Aufgabenstellung: Seien $b, m \in \mathbb{N}$ mit $b, m \geq 2$. Gesucht ist ein DEA, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0, \ldots, b-1\}^* \mid \begin{array}{l} w \text{ ist Darstellung einer durch } m \text{ teilbaren Zahl} \\ \text{im Zahlsystem zur Basis } b\} \end{array}$$

erkennt, wobei—der Einfachheit halber—führende Nullen in den Zahldarstellungen zugelassen sind und ε als Darstellung der Zahl 0 gilt.

Ein DEA, der die Sprache L erkennt, muss sich nur den Rest modulo m der bereits gelesenen Zahl merken, es genügen ihm also die Zustände $0, \ldots, m-1$.

---

[1] Man beachte, dass die Übergangsrelation von A' eine *Funktion* δ ist, deshalb ist die Schreibweise δ^* hier legitim, auch wenn A' kein DEA ist.

Ist nämlich w eine Darstellung von z, so ist wa eine Darstellung von $b * z + a$, d.h. der DEA muss beim Lesen der Ziffer a nur vom Zustand $i = z$ **mod** m in den Zustand $j = (b * i + a)$ **mod** m wechseln. Aus diesen Überlegungen ergibt sich der DEA $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ mit

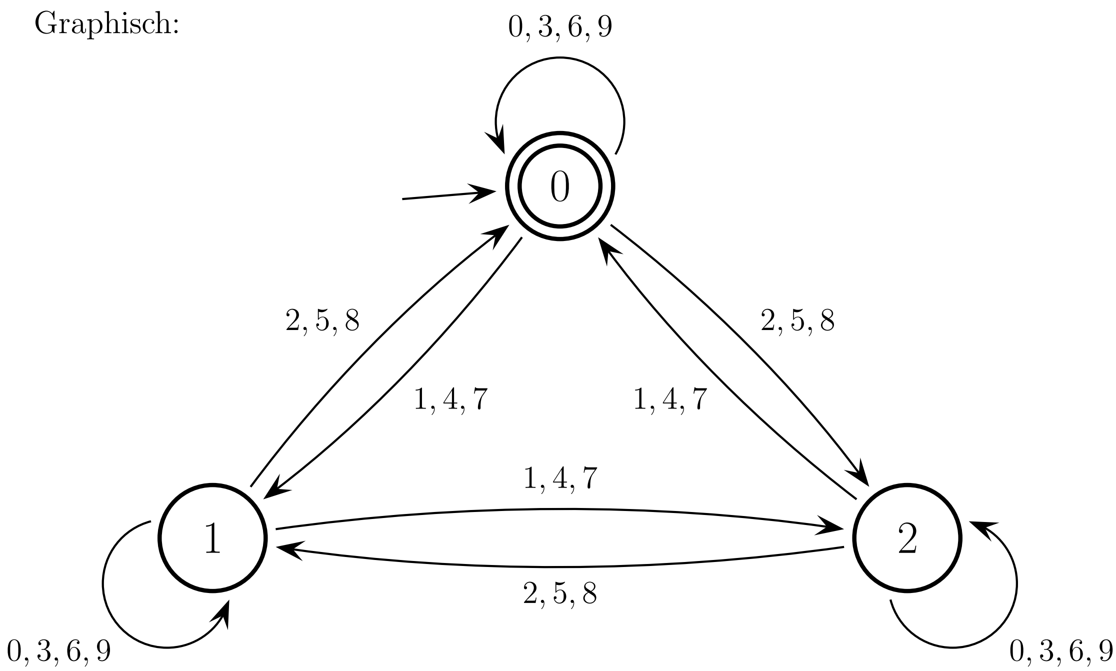
- Σ ist die Menge der Ziffern zur Basis b
- $Q = \{0, \ldots, m-1\}$
- $s = 0$
- $F = \{s\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
  $\delta(i, a) = (b * i + a)$ **mod** m

Damit ergeben sich folgende Lösungen für die beiden Teilaufgaben

a. Für $b = 10$ und $m = 3$ ist $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$ und $\delta(i, a) = (10 * i + a)$ **mod** $3 = (i + a)$ **mod** 3 für alle $i \in Q, a \in \Sigma$.

δ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Graphisch:



b. Für $b = 2$ und $m = 3$ ist $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$ und $\delta(i, a) = (2 * i + a)$ **mod** 3 für alle $i \in Q, a \in \Sigma$.

δ	0	1
0	0	1
1	2	0
2	1	2

Graphisch: