Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Wir betrachten nur die Relation “Präfix”, die wir kurz mit '$\sqsubseteq$' bezeichnen, also

$$u \sqsubseteq v \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in \Sigma^*.\, u \circ x = v$$

Die Beweise für “Suffix” und “Teilwort” verlaufen analog.

Reflexivität:

Wegen $u \circ \varepsilon = u$ gilt $u \sqsubseteq u$ für alle $u \in \Sigma^*$. Die Reflexivität ergibt sich also aus der Existenz eines neutralen Elements für die Verknüpfung '$\circ$'.

Transitivität:

Seien $u \sqsubseteq v$ und $v \sqsubseteq w$, d.h. es existieren $x, y \in \Sigma^*$ mit $u \circ x = v$ und $v \circ y = w$. Es folgt $(u \circ x) \circ y = w$, also auch $u \circ (x \circ y) = w$ und damit $u \sqsubseteq w$. Die Transitivität ergibt sich also aus der Assoziativität von '$\circ$'.

Antisymmetrie:

Sei $u \sqsubseteq v$ und $v \sqsubseteq u$, d.h. es existieren $x, y \in \Sigma^*$ mit $u \circ x = v$ und $v \circ y = u$. Es folgt $(u \circ x) \circ y = u$, also auch $u \circ (x \circ y) = u$. Das ist im Monoid $(\Sigma^*, \circ)$ nur möglich, wenn $x \circ y = \varepsilon$ und damit $x = y = \varepsilon$ ist. Also folgt $u = v$.

Zusammenfassung:

Reflexivität und Transitivität der Relation '$\sqsubseteq$' folgen bereits aus der Tatsache, dass $(\Sigma^*, \circ)$ ein Monoid ist. Aber zum Nachweis der Antisymmetrie von '$\sqsubseteq$' benötigt man Eigenschaften der Konkatenation '$\circ$', die *nicht* in allen Monoiden gelten: Man betrachte z.B das Monoid $(\mathbb{Z}, *)$. Dort bedeutet $x \sqsubseteq y$, dass x ein Teiler von y ist. Diese Relation ist *nicht* antisymmetrisch, denn es gilt z.B. $1 \sqsubseteq -1$ und $-1 \sqsubseteq 1$.

Aufgabe 2

Sei $(M, \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element e, sei $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man die n-te Potenz $x^n \in M$ durch folgende Induktion über n:

$$x^0 = e \tag{1}$$

$$x^{n+1} = x^n \circ x \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Es ist zu zeigen, dass folgende Gleichungen für alle $x \in M$, $m, n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) $x^0 = e$

(b) $x^1 = x$

(c) $x^m \circ x^n = x^{m+n}$

(d) $(x^m)^n = x^{mn}$

Beweis:

(a) gilt per Definition.

(b) ergibt sich wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} x^1 & = & x^0 \circ x & \text{wegen (2)} \\ & = & e \circ x & \text{wegen (1)} \\ & = & x & \text{da } e \text{ neutrales Element} \end{array}$$

(c) lässt sich durch Induktion über n beweisen:

Induktionsanfang:

$$\begin{array}{rcll} x^m \circ x^0 & = & x^m \circ e & \text{wegen (1)} \\ & = & x^m & \text{da } e \text{ neutrales Element} \\ & = & x^{m+0} & \end{array}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{array}{rcll} x^m \circ x^{n+1} & = & x^m \circ (x^n \circ x) & \text{wegen (2)} \\ & = & (x^m \circ x^n) \circ x & \text{wegen Assoziativität} \\ & = & x^{m+n} \circ x & \text{nach Induktionsannahme} \\ & = & x^{m+n+1} & \text{wegen (2)} \end{array}$$

(d) lässt sich durch Induktion über n beweisen:

Induktionsanfang:

$$\begin{array}{rcll} (x^m)^0 & = & e & \text{wegen (1)} \\ & = & x^0 & \text{wegen (1)} \\ & = & x^{m \cdot 0} & \end{array}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{array}{rcll} (x^m)^{n+1} & = & (x^m)^n \circ x^m & \text{wegen (2)} \\ & = & x^{mn} \circ x^m & \text{nach Induktionsannahme} \\ & = & x^{mn+m} & \text{wegen (c)} \\ & = & x^{m(n+1)} & \end{array}$$

Aufgabe 3

Per Definition gilt stets $L^0 = \{\varepsilon\}$, also sind nur noch die Sprachen L^+, L^* und L^n für alle $n > 0$ zu bestimmen.

a. $L = \emptyset$

Für alle $n > 0$ ist $L^n = \emptyset \circ \ldots \circ \emptyset = \emptyset$, also $L^+ = \bigcup_{n>0} L^n = \emptyset$ und $L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+ = \{\varepsilon\}$.

b. $L = \{\varepsilon\}$

Für alle $n > 0$ ist $L^n = \{\varepsilon\} \circ \ldots \circ \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$, also auch $L^+ = L^* = \{\varepsilon\}$.

c. $L = \{a\}^*$

Für alle $n > 0$ gilt $L^n = \{a^{\sum_{i=1}^n m_i} \mid m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}\} = \{a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$, also $L^n = \{a\}^*$ und damit auch $L^+ = L^* = \{a\}^*$.

d. $L = \{a\}^+$

Für alle $n > 0$ gilt $L^n = \{a^{\sum_{i=1}^n m_i} \mid m_1, \ldots, m_n \geq 1\} = \{a^m \mid m \geq n\}$. Also ist $L^{n+1} \subseteq L^n$ für alle $n > 0$ und damit $L^+ = L^1 = \{a\}^+$ und $L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+ = \{a\}^*$.

e. $L = \{a^p\}$ mit $p \in \mathbb{N}$

Für alle $n > 0$ gilt $L^n = \{a^{np}\}$, also $L^+ = \{a^{np} \mid n > 0\}$ und $L^* = \{a^{np} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

f. $L = \{a^p, a^q\}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $p \neq q$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $L^n = \{a^{kp+lq} \mid k, l \in \mathbb{N} \wedge k + l = n\}$, also $L^+ = \{a^{kp+lq} \mid k, l \in \mathbb{N} \wedge k + l \geq 1\}$ und $L^* = \{a^{kp+lq} \mid k, l \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 4

Laut Vorlesung ist eine Sprache regulär, wenn sie sich durch wiederholte Anwendungen der Operatoren $\cup, \circ$ und $*$ aus endlichen Sprachen aufbauen lässt. Wegen $L^+ = L \circ L^*$ kann man natürlich auch den Operator $+$ zu Hilfe nehmen.

a. $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das zweite Zeichen von } w \text{ ist eine Null}\}$

Es gilt $L_1 = \{0,1\} \circ \{0\} \circ \{0,1\}^*$, also ist L_1 regulär.

b. $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid 111 \text{ ist Teilwort von } w\}$

Es gilt $L_2 = \{0,1\}^* \circ \{111\} \circ \{0,1\}^*$, also ist L_2 regulär,

c. $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid 111 \text{ ist } \textit{kein} \text{ Teilwort von } w\}$

L_3 ist regulär wegen

$$L_3 \quad = \quad \{0\}^* \circ (\{1, 11\} \circ \{0\}^+)^* \circ \{\varepsilon, 1, 11\} \tag{3}$$

Beweis von (3):

'$\subseteq$':

Sei $w \in L_3$. Sei x das längste Präfix von w, das nur aus Nullen besteht und z das längste Suffix von w, das nur aus Einsen besteht. Da sich x und z nicht überschneiden können, existiert ein $y \in \{0,1\}^*$ mit $w = xyz$ und aus der Definition von L_3 folgt leicht

- $x \in \{0\}^*$
- $y = 1^{i_1}0^{k_1} \ldots 1^{i_n}0^{k_n}$ mit $n \geq 0$, $i_1, \ldots, i_n \in \{1, 2\}$, $k_1, \ldots, k_n \geq 1$
- $z \in \{\varepsilon, 1, 11\}$

Also gilt $w \in \{0\}^* \circ (\{1, 11\} \circ \{0\}^+)^* \circ \{\varepsilon, 1, 11\}$.

'$\supseteq$':

Sei $w \in \{0\}^* \circ (\{1, 11\} \circ \{0\}^+)^* \circ \{\varepsilon, 1, 11\}$, d.h. $w = xyz$ mit $x \in \{0\}^*$, $y \in (\{1, 11\} \circ \{0\}^+)^*$ und $z \in \{\varepsilon, 1, 11\}$. Angenommen, 111 ist Teilwort von w. Da 111 in keinem der drei Wörter x, y, z (ganz) enthalten ist, müsste es sich über mindestens zwei der drei Teilwörter erstrecken. Das ist aber nicht möglich, weil weder x noch y auf 1 endet. Also ist die Annahme falsch und damit ist $w \in L_3$.

d. $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Binärdarstellung einer durch 4 teilbaren Zahl}\}$

Die Aufgabenstellung ist leider ungenau, denn sie lässt offen

(a) ob führende Nullen in einer Binärdarstellung erlaubt sind

(b) ob das leere Wort als Darstellung der Null zugelassen ist

Wir schließen (b) aus und betrachten beide Möglichkeiten für (a).

Wenn man führende Nullen in Binärdarstellungen zulässt, dann gilt: $w \in \{0,1\}^*$ ist genau dann Binärdarstellung einer durch 4 teilbaren Zahl, wenn w nur aus dem Zeichen 0 besteht oder auf 00 endet, also

$$L_4 = \{0\} \ \cup \ \{0,1\}^* \circ \{00\}$$

Will man führende Nullen ausschließen, so besteht man im Falle $w \neq 0$ darauf, dass w mit dem Zeichen 1 beginnt, also

$$L_4 = \{0\} \ \cup \ \{1\} \circ \{0,1\}^* \circ \{00\}$$

In beiden Fällen ist L_4 regulär.

Aufgabe 5

Gesucht ist ein DEA, der folgende Sprache akzeptiert:

$$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid 111 \text{ ist ein Teilwort von } w\}$$

Ein solcher DEA muss zu jedem Zeitpunkt 4 Fälle für das bisher gelesene Wort w unterscheiden, nämlich:

(a) $w \in L_2$, d.h. w enthält schon 111:

In diesem Fall ist schon alles in Ordnung. Unabhängig vom Rest der Eingabe wird das Eingabewort akzeptiert, d.h. man bleibt in Fall (a).

(b) $w \notin L_2$ und w endet auf 11:

Wenn als nächstes Zeichen eine 1 kommt, hat man gewonnen (Fall (a)), andernfalls beginnt das Spiel von vorn (Fall (d)).

(c) $w \notin L_2$ und w endet auf 1 aber nicht auf 11:

Wenn als nächstes Zeichen eine 1 kommt, gerät man in Fall (b), andernfalls beginnt das Spiel von vorn (Fall (d)).

(d) $w \notin L_2$ und w endet *nicht* auf 1:

Wenn als nächstes Zeichen eine 1 kommt, gerät man in Fall (c), andernfalls bleibt man in Fall (d)

Aus diesen Überlegungen ergibt sich ein DEA $A = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$ mit $\Sigma = \{0,1\}$, $Q = \{q_\varepsilon, q_1, q_{11}, q_{111}\}$, $s = q_\varepsilon$, $F = \{q_{111}\}$ und

δ	0	1
q_ε	q_ε	q_1
q_1	q_ε	q_{11}
q_{11}	q_ε	q_{111}
q_{111}	q_{111}	q_{111}

Will man beweisen, dass tatsächlich $L(A) = L_2$ gilt, so zeigt man durch Induktion über $|w|$, dass für jedes $w \in \{a,b\}^*$ folgendes gilt:

- Wenn $w \in L_2$, dann gilt $(s, w) \vdash_A^* (q_{111}, \varepsilon)$.
- Wenn $w \notin L_2$, dann gilt $(s, w) \vdash_A^* (q_u, \varepsilon)$, wobei u das längste Wort in der Menge $\{\varepsilon, 1, 11\}$ ist, das zugleich Suffix von w ist.

Dieser Ansatz lässt sich auf beliebige Sprachen der Form

$$L_u = \{w \in \Sigma^* \mid u \text{ ist Teilwort von } w\}$$

verallgemeinern. Man vergleiche dazu Seite 139 der Vorlesung und Aufgabe 1 von Übungsblatt 4.