Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Hannes Diener
Kurt Sieber

Grundlagen der Theoretischen Informatik
Sommersemester 2013

Probeklausur

Aufgabe 1 (26 Punkte)
Sei $L = \{w \in \{a,b\}^+ \mid \text{ das erste und das letzte Zeichen von } w \text{ sind verschieden}\}$

a. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an mit $L = L(\alpha)$.

b. Geben Sie einen DEA A an mit $L = L(A)$.

Begründen Sie zunächst intuitiv, warum $L = L(A)$ gilt. Dazu sollten Sie angeben, welche Information sich Ihr DEA in seinem aktuellen Zustand "merkt".

c. Beweisen Sie, dass tatsächlich $L = L(A)$ gilt.

(Wenn in Ihrem Induktionsbeweis mehrere ähnliche Fälle auftreten, genügt es, einen der Fälle auszuarbeiten.)

d. Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G an mit $L = L(G)$.

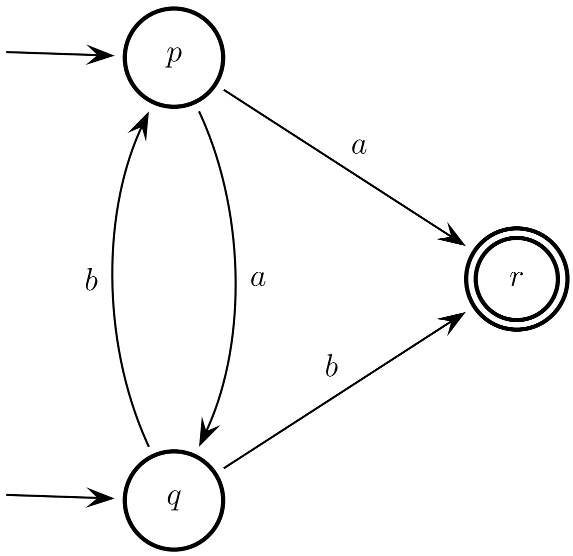
Aufgabe 2 (16 Punkte)
Sei L die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a,b\}$, deren Länge ungerade ist und deren mittleres Zeichen ein a ist, also

$$L = \{w_1 a w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^* \wedge |w_1| = |w_2|\}$$

a. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.

b. Beweisen Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode (oder ausführlicher: mit dem Schubfachprinzip), dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Konstruieren Sie den erreichbaren Teil des Potenzautomaten zu folgendem NDEA



Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Zeigen Sie, dass dann auch die Sprachen

a. $\mathit{Sub}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\, v \in L.\ w \text{ ist Teilwort von } v\}$

b. $\mathit{Super}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\, v \in L.\ v \text{ ist Teilwort von } w\}$

regulär sind.

Aufgabe 5 (16 Punkte)
Geben Sie jeweils einen Algorithmus an, der einen DEA A als Eingabe erhält und testet ob

a. $|w|$ gerade ist für mindestens ein Wort $w \in L(A)$

b. $|w|$ gerade ist für alle Wörter $w \in L(A)$

Hinweis:

Sie dürfen auf alle Konstruktionsverfahren und Entscheidungsalgorithmen zurückgreifen, die aus der Vorlesung oder aus den Übungen bekannt sind.

Aufgabe 6 (12 Punkte)
Sei $L = \{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt. Begründen Sie, warum Ihre Grammatik tatsächlich die Sprache L erzeugt.

Aufgabe 7 (18 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^m b^n c^{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 8 (18 Punkte)
Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{0,1\}^*$ das gespiegelte Wort w^R ausgibt.

Erklären Sie auch (nachvollziehbar) die Idee hinter Ihrer Konstruktion.

Aufgabe 9 (18 Punkte)
Schreiben Sie ein `WHILE`-Programm, das die charakteristische Funktion der geraden natürlichen Zahlen berechnet.

Aufgabe 10 (18 Punkte)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale μ-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass auch die folgenden beiden Funktionen total und μ-rekursiv sind:

- Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Zahlen $f(0), \ldots, f(n)$ zuordnet.
- Die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl m zuordnet, so dass $f(m)$ das Maximum der Zahlen $f(0), \ldots, f(n)$ ist.

(Sie müssen nicht zeigen, dass die arithmetischen Funktionen ($x + y$, xy, x^y, $\mathrm{sg}(x)$, $|x - y|$, usw.) μ-rekursiv sind.)

Aufgabe 11 (18 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des s-m-n–Theorems, dass es eine μ-rekursive Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$u(g(i), n) = n^i \ .$$

(Sie müssen nicht zeigen, dass die arithmetischen Funktionen ($x + y$, xy, x^y, $\mathrm{sg}(x)$, $|x - y|$, usw.) μ-rekursiv sind.)