Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Compilerbau und Softwareanalyse

Hannes Diener
Philipp Reh

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2013

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es keine totale universelle Funktion geben kann; d.h. es gibt keine totale μ-rekursive Funktion $v : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, so dass es für jede totale μ-rekursive Funktion $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ einen Index e mit

$$v(e, \langle x_1, \ldots, x_k \rangle) = h(x_1, \ldots, x_k)$$

gibt.
(Warum funktioniert Ihr Argument aber nicht für die normale universelle Funktion?)

Aufgabe 2

Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch $A \setminus B$ und $A \vartriangle B = \{x \mid x \text{ ist entweder in } A \text{ oder } B\text{, aber nicht in beiden}\}$ entscheidbar sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

a. $A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$;

b. Ist A entscheidbar und $B \neq \emptyset, \mathbb{N}$, dann ist $A \leq B$;

Aufgabe 4
Zeigen Sie mit Hilfe des s-m-n–Theorems, dass es eine Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$u(g(i,j),\cdot) = u(i,\cdot) + u(j,\cdot)$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass auch $H \leqslant H_d$ und $H_0 \leqslant H_d$.

Aufgabe 6
Leiten Sie den Rekursionssatz aus dem Fixpunktsatz her.[1]

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass es eine Zahl e gibt, so dass
$$u(e,x) = e \ ,$$
d.h. intuitiv das extrem narzisistische Programm e macht nichts anderes als seine eigene Beschreibung auszugeben.

[1] Mit einem einfachen Beweis. Natürlich ist ein direkter Beweis des Rekursionssatzes auch eine Herleitung des Rekursionssatzes unter Annahme des Fixpunktsatzes. Gesucht ist hier aber wie gesagt eine kürzere Herleitung.