Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Compilerbau und Softwareanalyse

Hannes Diener
Philipp Reh

Grundlagen der Theoretischen Informatik
Sommersemester 2013

Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

a. $\lambda x.\lambda y.x^y$

b. $\lambda x.\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Paarungs-Funktion π aus der Vorlesung bijektiv ist. Folgern Sie außerdem mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für alle k die Funktionen $\langle \cdot \rangle^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ bijektiv sind.

Aufgabe 3

a. Bestimmen Sie $\langle 3, 1, 4 \rangle^3$ und $\langle 3, 1, 4 \rangle^*$.

b. Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass $\langle \rangle^*$ nicht surjektiv ist.

c. Bestimmen Sie $(666)_2^3$

Aufgabe 4
Die Folge von Fibonacci-Zahlen (F_n) ist bekanntermaßen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \;;$$

d.h. die ersten beiden Fibonacci-Zahlen sind 1 und jede weitere Zahl ist die Summe ihrer zwei Vorgänger. Zeigen Sie, dass die Funktion, die jedem n die n-te Fibonacci-Zahl zuordnet, primitiv-rekursiv ist.
Tipp: Verwenden Sie Tupelkodierungen, indem sie zuerst zeigen, dass die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $g(\pi(F_n, F_{n+1})) = \pi(F_{n+1}, F_{n+2})$ primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 5
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale μ-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass auch die folgenden beiden Funktionen total und μ-rekursiv sind:

a. Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Zahlen $f(0), \dots, f(n)$ zuordnet.

b. Die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl m zuordnet, so dass $f(m)$ das Maximum der Zahlen $f(0), \dots, f(n)$ ist.

Aufgabe 6
Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion gilt: $B(n, x) > x$ für alle n.
Tipp: Zwei geschachtelte Induktionen über n und x.