Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Compilerbau und Softwareanalyse

Hannes Diener
Philipp Reh

Grundlagen der Theoretischen Informatik
Sommersemester 2013

Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Analog zur Konstruktion der universellen Turingmaschine könnte man ja auch hoffen einen universellen endlichen Automaten zu konstruieren; d.h. einen endlichen Automaten A_U, der bei Eingabe einer Kodierung w_A eines Automaten A das Wort $w_A\#w$ genau dann akzeptiert, wenn A dieses akzeptiert.
Zur Einfachheit nehmen wir an, dass wir nur Automaten simulieren mit $\Sigma = \{0, 1\}$, deren Zustände $q_0, q_1, \ldots$ heißen, und die q_0 als Startzustand und q_1 als einzigen Endzustand haben.

Der universelle Automat darf allerdings ein größeres Alphabet verwenden.

- **a.** Erklären Sie, wie Sie einen endlichen Automaten A als Wort w_A kodieren würden.
- **b.** Zeigen Sie, dass es keinen universellen endlichen Automaten geben kann.

Aufgabe 2
Finden Sie ein `LOOP`-Programm, das mit der Speicherbelegung [] beginnt (d.h. alle Variablen sind mit 0 belegt), und mit einer Speicherbelegung σ endet, so dass $\sigma(x_1) > 1000$. Die Instruktion $x_i \coloneqq x_j + c$ darf allerdings nur in der Form $x_i \coloneqq x_j + 1$ verwendet werden (sonst wäre man ja in einer Zeile fertig). Was ist das kürzeste mögliche solche Programm, das Sie finden können?

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen `LOOP`-berechenbar sind:

a. Die Differenz $\lambda x.\lambda y.(|x-y|)$

b. Die Multiplikation

c. Die Division ohne Rest

d. Die Mod-Funktion (also der Rest einer Division)

Aufgabe 4
In der Vorlesung haben wir gesehen, wie wir `IF` $x_i = 0$ `THEN` P - Konstrukte als syntaktischen Zucker zur Sprache `LOOP` hinzufügen können. Erweitern Sie diesen syntaktischen Zucker zu `IF` $x_i = 0$ `THEN` P `ELSE` Q - Statements. Geben Sie außerdem an, wie man mit `IF` $x_i = x_j$ `THEN` P `ELSE` Q - Statements umgehen könnte.

Aufgabe 5
(Zusatzaufgabe: Berechnung von π) Zeigen Sie, dass es ein `LOOP`-Programm gibt, das die folgende Funktion berechnet:

$$p = \lambda n. \left|\{(x,y) \in S_n \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}\right| \ ,$$

wobei S_n die Gitterpunkte im Abstand $\frac{1}{2^n}$ des Einheitsquadrats sind, also

$$S_n = \left\{ \left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) \middle| \, 0 \leqslant i, j, \leqslant 2^n \right\} \ .$$

Da man leicht sieht, dass
$$\frac{4p(n)}{2^{2n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi \ ,$$
berechnet p in diesem Sinne also π.